12082CH12

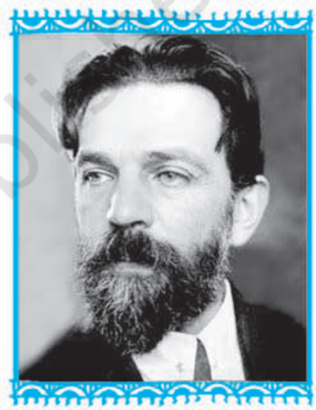
अध्याय 12

रैखिक प्रोग्रामन Linear Programming

❖ *The mathematical experience of the student is incomplete if he never had the opportunity to solve a problem invented by himself. — G POLYA* ❖

12.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में हम रैखिक समीकरणों और दिन प्रति दिन की समस्याओं में उनके अनुप्रयोग पर विचार-विमर्श कर चुके हैं। कक्षा XI में हमने दो चर राशियों वाले रैखिक असमिकाओं और रैखिक असमिकाओं के निकायों के आलेखीय निरूपण से हल निकालने के विषय में अध्ययन कर चुके हैं। गणित में कई अनुप्रयोगों में असमिकाओं/समीकरणों के निकाय सम्मिलित हैं। इस अध्याय में हम रैखिक असमिकाओं/समीकरणों के निकायों का नीचे दी गई कुछ वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने में उपयोग करेंगे।



L. Kantorovich

एक फर्नीचर व्यापारी दो वस्तुओं जैसे मेज़ और कुर्सियों का व्यवसाय करता है। निवेश के लिए उसके पास Rs 50,000 और रखने के लिए केवल 60 वस्तुओं के लिए स्थान है। एक मेज़ पर Rs 2500 और एक कुर्सी पर Rs 500 की लागत आती है। वह अनुमान लगाता है कि एक मेज़ को बेचकर वह Rs 250 और एक कुर्सी को बेचने से Rs 75 का लाभ कमा सकता है। मान लीजिए कि वह सभी वस्तुओं को बेच सकता है जिनको कि वह खरीदता है तब वह जानना चाहता है कि कितनी मेज़ों एवं कुर्सियों को खरीदना चाहिए ताकि उपलब्ध निवेश राशि पर उसका सकल लाभ अधिकतम हो।

इस प्रकार की समस्याओं जिनमें सामान्य प्रकार की समस्याओं में लाभ का अधिकतमीकरण और लागत का न्यूनतमीकरण खोजने का प्रयास किया जाता है, इष्टतमकारी समस्याएँ कहलाती हैं। अत: इष्टतमकारी समस्या में अधिकतम लाभ, न्यूनतम लागत या संसाधनों का न्यूनतम उपयोग सम्मिलित है।

रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ एक विशेष लेकिन एक महत्त्वपूर्ण प्रकार की इष्टतमकारी समस्या है और उपरोक्त उल्लिखित इष्टतमकारी समस्या भी एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या है। उद्योग, वाणिज्य, प्रबंधन विज्ञान आदि में विस्तृत सुसंगतता के कारण रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ अत्यधिक महत्त्व की हैं।

इस अध्याय में, हम कुछ रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ और उनका आलेखी विधि द्वारा हल निकालने का अध्ययन करेंगे। यद्यपि इस प्रकार समस्याओं का हल निकालने के लिए अन्य विधियाँ भी हैं।

12.2 रैखिक प्रोग्रामन समस्या और उसका गणितीय सूत्रीकरण (Linear Programming Problem and its Mathematical Formulation)

हम अपना विचार विमर्श उपरोक्त उदाहरण के साथ प्रारंभ करते हैं जो कि दो चर राशियों वाली समस्या के गणितीय सूत्रीकरण अथवा गणितीय प्रतिरूप का मार्गदर्शन करेगा। इस उदाहरण में हमने ध्यानपूर्वक देखा कि

(i) व्यापारी अपनी धन राशि को मेज़ों या कुर्सियों या दोनों के संयोजनों में निवेश कर सकता है। इसके अतिरिक्त वह निवेश के विभिन्न योजनात्मक विधियों से विभिन्न लाभ कमा सकेगा।

(ii) कुछ अधिक महत्त्वपूर्ण स्थितियाँ या व्यवरोधों का भी समावेश है जैसे उसका निवेश अधिकतम Rs 50,000 तक सीमित है तथा उसके पास अधिकतम 60 वस्तुओं को रखने के लिए स्थान उपलब्ध है।

मान लीजिए कि वह कोई कुर्सी नहीं खरीदता केवल मेज़ों के खरीदने का निश्चय करता है, इसलिए वह $50,000 \div 2500$, या 20 मेज़ों को खरीद सकता है। इस स्थिति में उसका सकल लाभ Rs (250×20) या **Rs 5000** होगा।

मान लीजिए कि वह कोई मेज़ न खरीदकर केवल कुर्सियाँ ही खरीदने का चयन करता है। तब वह अपनी उपलब्ध Rs 50,000 की राशि में $50,000 \div 500$, अर्थात् 100 कुर्सियाँ ही खरीद सकता है। परंतु वह केवल 60 नगों को ही रख सकता है। अत: वह 60 कुर्सियाँ मात्र खरीदने के लिए बाध्य होगा। जिससे उसे सकल लाभ Rs 60×75 अर्थात् **Rs 4500** ही होगा।

ऐसी और भी बहुत सारी संभावनाएँ हैं। उदाहरण के लिए वह 10 मेज़ों और 50 कुर्सियाँ खरीदने का चयन कर सकता है, क्योंकि उसके पास 60 वस्तुओं को रखने का स्थान उपलब्ध है। इस स्थिति में उसका सकल लाभ Rs $(10 \times 250 + 50 \times 75)$, अर्थात् **Rs 6250** इत्यादि।

अत: हम ज्ञात करते हैं कि फर्नीचर व्यापारी विभिन्न चयन विधियों के द्वारा अपनी धन राशि का निवेश कर सकता है और विभिन्न निवेश योजनाओं को अपनाकर विभिन्न लाभ कमा सकेगा।

अब समस्या यह है कि उसे अपनी धन राशि को अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए किस प्रकार निवेश करना चाहिए? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें समस्या का गणितीय सूत्रीकरण करने का प्रयास करना चाहिए।

12.2.1 *समस्या का गणितीय सूत्रीकरण (Mathematical Formulation of the Problem)*

मान लीजिए कि मेज़ों की संख्या x और कुर्सियों की संख्या y है जिन्हें फर्नीचर व्यापारी खरीदता है। स्पष्टत: x और y ऋणेतर हैं, अर्थात्

$$x \geq 0 \quad \text{(ऋणेतर व्यवरोध)} \quad \ldots (1)$$
$$y \geq 0 \quad \ldots (2)$$

क्योंकि मेज़ों और कुर्सियों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

व्यापारी (व्यवसायी) पर अधिकतम धन राशि (यहाँ यह Rs 50,000 है) का निवेश करने का व्यवरोध है और व्यवसायी के पास केवल अधिकतम वस्तुओं (यहाँ यह 60 है) को रखने के लिए स्थान का भी व्यवरोध है।

गणितीय रूप में व्यक्त करने पर

$$2500x + 500y \le 50,000 \quad \text{(निवेश व्यवरोध)}$$

या $$5x + y \le 100 \qquad \text{... (3)}$$

और $$x + y \le 60 \quad \text{(संग्रहण व्यवरोध)} \qquad \text{... (4)}$$

व्यवसायी इस प्रकार से निवेश करना चाहता है उसका लाभ Z (माना) अधिकतम हो और जिसे x और y के फलन के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:

$Z = 250x + 75y$ (उद्देशीय फलन कहलाता है)

प्रदत्त समस्या का अब गणितीय रूप में परिवर्तित हो जाती है:

$Z = 250x + 75y$ का अधिकतमीकरण कीजिए

जहाँ व्यवरोध निम्नलिखित है

$$5x + y \le 100$$

$$x + y \le 60$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

इसलिए हमें रैखिक फलन Z का अधिकतमीकरण करना है जबकि ऋणेतर चरों वाली रैखिक असमिकाओं के रूप कुछ विशेष स्थितियों के व्यवरोध व्यक्त किए गए हैं। कुछ अन्य समस्याएँ भी हैं जिनमें रैखिक फलन का न्यूनतमीकरण किया जाता है जबकि ऋणेतर चर वाली रैखिक असमिकाओं के रूप में कुछ विशेष स्थितियों के व्यवरोध व्यक्त किए जाते है। ऐसी समस्याओं को रैखिक प्रोग्रामन समस्या कहते हैं।

अत: एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या वह समस्या है जो कि x और y जैसे कुछ अनेक चरों के एक रैखिक फलन Z (जो कि उद्देश्य फलन कहलाता है) का इष्टतम सुसंगत/अनुकूलतम सुसंगत मान (अधिकतम या न्यूनतम मान) ज्ञात करने से संबंधित है। प्रतिबंध यह है कि चर ऋणेतर पूर्णांक हैं और ये रैखिक असमिकाओं के समुच्चय रैखिक व्यवरोधों को संतुष्ट करते हैं। रैखिक पद से तात्पर्य है कि समस्या में सभी गणितीय संबंध रैखिक हैं जबकि प्रोग्रामन से तात्पर्य है कि विशेष प्रोग्राम या विशेष क्रिया योजना ज्ञात करना।

आगे बढ़ने से पूर्व हम अब कुछ पदों (जिनका प्रयोग ऊपर हो चुका है) को औपचारिक रूप से परिभाषित करेंगे जिनका कि प्रयोग हम रैखिक प्रोग्राम समस्याओं में करेंगे:

उद्देश्य फलन रैखिक फलन $Z = ax + by$, जबकि a, b अचर है जिनका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण होना है एक रैखिक उद्देश्य फलन कहलाता है।

© NCERT not to be republished

उपरोक्त उदाहरण में $Z = 250x + 75y$ एक रैखिक उद्देश्य फलन है। चर x और y निर्णायक चर कहलाते हैं।

व्यवरोध एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के चरों पर रैखिक असमिकाओं या समीकरण या प्रतिबंध व्यवरोध कहलाते हैं। प्रतिबंध $x \geq 0, y \geq 0$ ऋणेतर व्यवरोध कहलाते हैं। उपरोक्त उदाहरण में (1) से (4) तक असमिकाओं का समुच्चय व्यवरोध कहलाते हैं।

इष्टतम सुसंगत समस्याएँ निश्चित व्यवरोधों के अधीन असमिकाओं के समुच्चय द्वारा निर्धारित समस्या जो चरों (यथा दो चर x और y) में रैखिक फलन को अधिकतम या न्यूनतम करे, इष्टतम सुसंगत समस्या कहलाती है। रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ एक विशिष्ट प्रकार की इष्टतम सुसंगत समस्या है। सुसंगत समस्या व्यापारी द्वारा मेज़ों तथा कुर्सियों की खरीद में प्रयुक्त एक इष्टतम सुसंगत समस्या तथा रैखिक प्रोग्रामन की समस्या का एक उदाहरण है।

अब हम विवेचना करेंगे कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को किस प्रकार हल किया जाता है। इस अध्याय में हम केवल आलेखीय विधि से ही संबंधित रहेंगे।

12.2.2 *रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने की आलेखीय विधि (Graphical Method of Solving Linear Programming Problems)*

कक्षा XI, में हम सीख चुके है कि किस प्रकार दो चरों x और y से संबंधित रैखिक असमीकरण निकायों का आरेख खींचते हैं तथा आरेखीय विधि द्वारा हल ज्ञात करते हैं। अब हमें अनुच्छेद 12.2 में विवेचन की हुई मेज़ों और कुर्सियों में निवेश की समस्या का उल्लेख करेंगे। अब हम इस समस्या को आरेख द्वारा हल करेंगे। अब हमें रैखिक असमीकरणों के रूप प्रदत्त व्यवरोधों का आरेख खींचें:

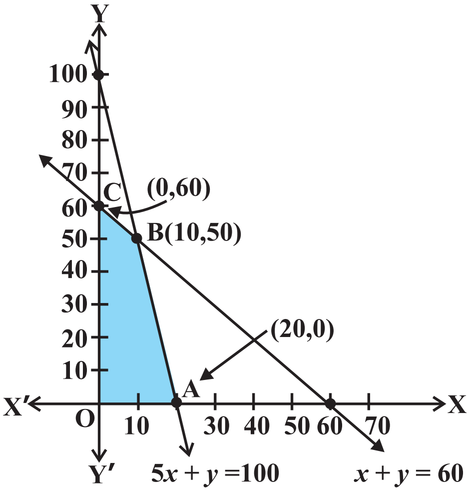
$5x + y \leq 100$ ... (1)

$x + y \leq 60$ ... (2)

$x \geq 0$ ... (3)

$y \geq 0$ ... (4)

इस निकाय का आरेख (छायांकित क्षेत्र) में असमीकरणों (1) से (4) तक के द्वारा नियत सभी अर्धतलों के उभयनिष्ठ बिंदुओं से निर्मित हैं। इस क्षेत्र में प्रत्येक बिंदु व्यापारी (व्यवसायी) को मेज़ों और कुर्सियों में निवेश करने के लिए सुसंगत विकल्प प्रस्तुत करता है। इसलिए यह क्षेत्र समस्या का सुसंगत क्षेत्र कहलाता है (आकृति 12.1)। इस क्षेत्र का प्रत्येक बिंदु समस्या का सुसंगत हल कहलाता है।



आकृति 12.1

अतः हम निम्न को परिभाषित करते हैं:

सुसंगत क्षेत्र प्रदत्त समस्या के लिए एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के ऋणेतर व्यवरोध $x, y \geq 0$ सहित सभी व्यवरोधों द्वारा नियत उभयनिष्ठ क्षेत्र सुसंगत क्षेत्र (या हल क्षेत्र) कहलाता है आकृति 12.1 में क्षेत्र OABC (छायांकित) समस्या के लिए सुसंगत क्षेत्र है। सुसंगत क्षेत्र के अतिरिक्त जो क्षेत्र है उसे असुसंगत क्षेत्र कहते हैं।

सुसंगत हल समूह सुसंगत क्षेत्र के अंतः भाग तथा सीमा के सभी बिंदु व्यवरोधों के सुसंगत हल कहलाते हैं। आकृति 12.1 में सुसंगत क्षेत्र OABC के अंतः भाग तथा सीमा के सभी बिंदु समस्या के सुसंगत हल प्रदर्शित कहते हैं। उदाहरण के लिए बिंदु (10, 50) समस्या का एक सुसंगत हल है और इसी प्रकार बिंदु (0, 60), (20, 0) इत्यादि भी हल हैं।

सुसंगत हल के बाहर का कोई भी बिंदु असुसंगत हल कहलाता हैं उदाहरण के लिए बिंदु (25, 40) समस्या का असुसंगत हल है।

इष्टतम/अनुकूलतम (सुसंगत) हलः सुसंगत क्षेत्र में कोई बिंदु जो उद्देश्य फलन का इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम) दे, एक इष्टतम हल कहलाता है।

अब हम देखते हैं कि सुसंगत क्षेत्र OABC में प्रत्येक बिंदु (1) से (4) तक में प्रदत्त सभी व्यवरोधों को संतुष्ट करता है और ऐसे अनंत बिंदु हैं। यह स्पष्ट नहीं है कि हम उद्देश्य फलन $Z = 250x + 75y$ के अधिकतम मान वाले बिंदु को किस प्रकार ज्ञात करने का प्रयास करें। इस स्थिति को हल करने के लिए हम निम्न प्रमेयों का उपयोग करेंगे जो कि रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने में मूल सिद्धांत (आधारभूत) है। इन प्रमेयों की उपपति इस पुस्तक के विषय-वस्तु से बाहर है।

प्रमेय 1 माना कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए R सुसंगत क्षेत्र* (उत्तल बहुभुज) है और माना कि $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। जब Z का एक इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम) हो जहाँ व्यवरोधों से संबंधित चर x और y रैखिक असमीकरणों द्वारा व्यक्त हो तब यह इष्टतम मान सुसंगत क्षेत्र के कोने (शीर्ष) पर अवस्थित होने चाहिए।

प्रमेय 2 माना कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए R सुसंगत क्षेत्र है तथा $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। यदि R परिबद्ध क्षेत्र हो तब उद्देश्य फलन Z, R में दोनों अधिकतम और न्यूनतम मान रखता है और इनमें से प्रत्येक R के कोनीय (corner) बिंदु (शीर्ष) पर स्थित होता है।

टिप्पणी यदि R अपरिबद्ध है तब उद्देश्य फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान का अस्तित्व नहीं भी हो सकता है। फिर भी यदि यह विद्यमान है तो R के कोनीय बिंदु पर होना चाहिए, (प्रमेय 1 के अनुसार)

उपरोक्त उदाहरण में परिबद्ध (सुसंगत) क्षेत्र के कोनीय बिंदु O, A, B और C हैं और बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात करना सरल है यथा (0, 0), (20, 0), (10, 50) और (0, 60) क्रमशः कोनीय बिंदु हैं। अब हमें इन बिंदुओं पर, Z का मान ज्ञात करना है।

वह इस प्रकार है:

सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष	Z के संगत मान	
O (0,0)	0	
C (0,60)	4500	
B (10,50)	**6250** ←	अधिकतम
A (20,0)	5000	

हम निरीक्षण करते हैं कि व्यवसायी को निवेश योजना (10, 50) अर्थात् 10 मेज़ों और 50 कुर्सियों के खरीदने में अधिकतम लाभ होगा।

इस विधि में निम्न पदों का समाविष्ट हैं:

1. रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत क्षेत्र ज्ञात कीजिए और उसके कोनीय बिंदुओं (शीर्ष) को या तो निरीक्षण से अथवा दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु को दो रेखाओं की समीकरणों को हल करके उस बिंदु को ज्ञात कीजिए।
2. उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का मान प्रत्येक कोनीय बिंदु पर ज्ञात कीजिए। माना कि M और m, क्रमशः इन बिंदुओं पर अधिकतम तथा न्यूनतम मान प्रदर्शित करते हैं।
3. (i) जब सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध है, M और m, Z के अधिकतम और न्यूनतम मान हैं।

   (ii) ऐसी स्थिति में जब सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध हो तो हम निम्नलिखित विधि का उपयोग करते हैं।
4. (a) M को Z का अधिकतम मान लेते हैं यदि $ax + by > M$ द्वारा प्राप्त अर्ध-तल का कोई बिंदु सुसंगत क्षेत्र में न पड़े अन्यथा Z कोई अधिकतम मान नहीं है।

   (b) इसी प्रकार, m, को Z का न्यूनतम मान लेते हैं यदि $ax + by < m$ द्वारा प्राप्त खुले अर्धतल और सुसंगत क्षेत्र में कोई बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। अन्यथा Z का कोई न्यूनतम मान नहीं है।

हम अब कुछ उदाहरणों के द्वारा कोनीय विधि के पदों को स्पष्ट करेंगे:

उदाहरण 1 आलेख द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए:

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + y \leq 50 \quad \ldots (1)$$

* सुसंगत क्षेत्र का कोनीय बिंदु क्षेत्र का ही कोई बिंदु होता है जो दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु है।

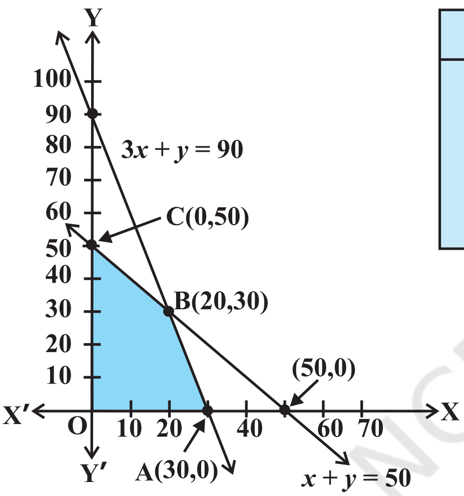
** एक रैखिक समीकरण निकाय का सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध कहा जाता है यदि यह एक वृत के अंतर्गत परिबद्ध किया जा सकता है अन्यथा इसे अपरिबद्ध कहते हैं। अपरिबद्ध से तात्पर्य है कि सुसंगत क्षेत्र किसी भी दिशा में असीमित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

$$3x + y \leq 90 \quad \ldots (2)$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

$Z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए:

हल आकृति 12.2 में छायांकित क्षेत्र (1) से (3) के व्यवरोधों के निकाय के द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र है। हम निरीक्षण करते है कि सुसंगत क्षेत्र OABC परिबद्ध है। इसलिए हम Z का अधिकतम मान ज्ञात करने के लिए कोनीय बिंदु विधि का उपयोग करेंगे।



कोनीय बिंदु	Z के संगत मान
(0, 0)	0
(30, 0)	**120** ← अधिकतम
(20, 30)	110
(0, 50)	50

आकृति 12. 2

कोनीय बिंदुओं O, A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (0, 0), (30, 0), (20, 30) और (0, 50) हैं। अब प्रत्येक कोनीय बिंदु पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

अतः बिंदु (30, 0) पर Z का अधिकतम मान 120 है।

उदाहरण 2 आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + 2y \geq 10 \quad \ldots (1)$$

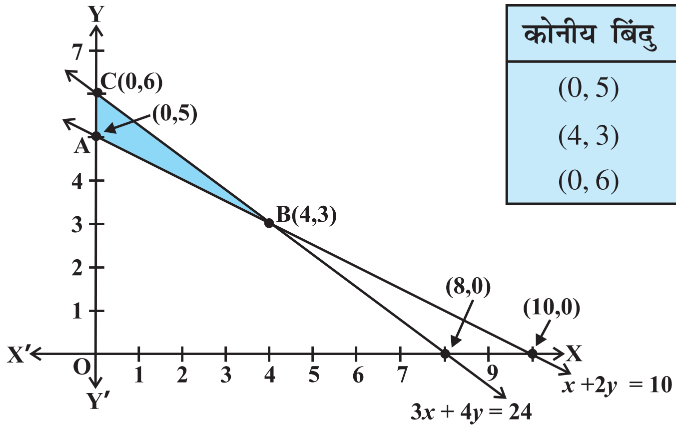
$$3x + 4y \leq 24 \quad \ldots (2)$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

$Z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए

हल आकृति 12.3 में छायांकित क्षेत्र, (1) से (3) के व्यवरोधों के निकाय द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र ABC है जो परिबद्ध है। कोनीय बिंदुओं A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (0, 5), (4, 3) और (0, 6) हैं। हम इन बिंदुओं पर $Z = 200x + 500y$ का मान ज्ञात करते हैं

© NCERT not to be republished



कोनीय बिंदु	Z के संगत मान
(0, 5)	2500
(4, 3)	**2300** ← न्यूनतम
(0, 6)	3000

आकृति 12.3

अतः बिंदु (4, 3) पर Z का न्यूनतम मान Rs 2300 प्राप्त होता है।

उदाहरण 3 आलेखीय विधि से निम्न समस्या को हल कीजिए:

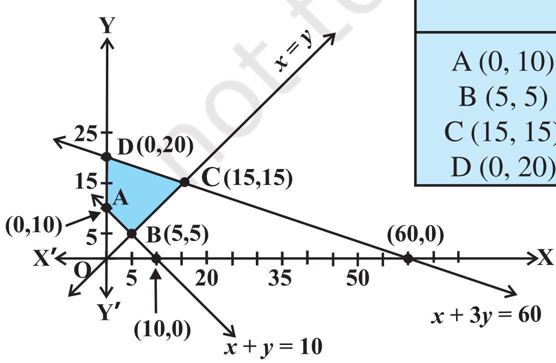
निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + 3y \leq 60 \quad \ldots (1)$$
$$x + y \geq 10 \quad \ldots (2)$$
$$x \leq y \quad \ldots (3)$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

$Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

हल सबसे पहले हम (1) से (4) तक की रैखिक असमिकाओं के निकाय के सुसंगत क्षेत्र का आलेख खींचते हैं। सुसंगत क्षेत्र ABCD को आकृति 12.4 में दिखाया गया है। क्षेत्र परिबद्ध है। कोनीय

कोनीय बिंदु	Z के संगत मान $Z = 3x + 9y$
A (0, 10)	90
B (5, 5)	**60** ← न्यूनतम
C (15, 15)	**180** } ← अधिकतम (बहु इष्टतम हल)
D (0, 20)	**180**



आकृति 12.4

© NCERT not to be republished

बिंदुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः (0, 10), (5, 5), (15, 15) और (0, 20) हैं। अब हम Z के न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करने के लिए कोनीय बिंदु विधि का उपयोग करते हैं। सारणी से हम सुसंगत क्षेत्र बिंदु B (5, 5) पर Z का न्यूनतम मान 60 प्राप्त करते हैं।

Z का अधिकतम मान सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं प्रत्येक C (15, 15) और D (0, 20) पर 120 प्राप्त होता है।

टिप्पणी निरीक्षण कीजिए कि उपरोक्त उदाहरण में, समस्या कोनीय बिंदुओं C और D, पर समान इष्टतम हल रखती है, अर्थात् दोनों बिंदु वही अधिकतम मान 180 उत्पन्न करते हैं। ऐसी स्थितियों में दो कोनीय बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड CD पर प्रत्येक बिंदु तथा C और D भी एक ही अधिकतम मान देते हैं। वही उस स्थिति में भी सत्य है यदि दो बिंदु वही न्यूनतम मान उत्पन्न करते हैं।

उदाहरण 4 आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $Z = -50x + 20y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत ज्ञात कीजिए:

$$2x - y \geq -5 \quad \text{... (1)}$$

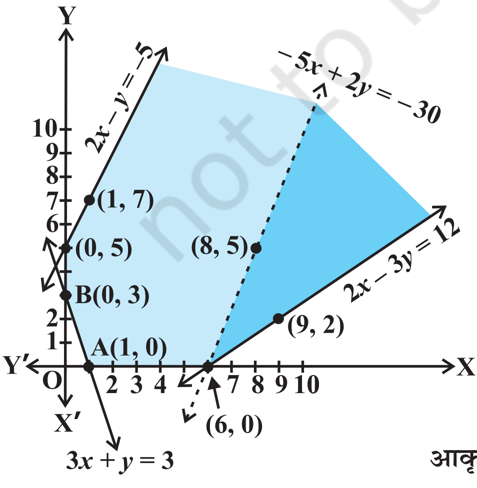
$$3x + y \geq 3 \quad \text{... (2)}$$

$$2x - 3y \leq 12 \quad \text{... (3)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \text{... (4)}$$

हल सबसे पहले हम (1) से (4) तक के असमीकरण निकाय द्वारा सुसंगत क्षेत्र का आलेख खींचते है। आकृति 12.5 में सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) दिखाया गया है। निरीक्षण कीजिए कि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है।

अब हम कोनीय बिंदुओं पर Z का मान भी ज्ञात करेंगे:



आकृति 12. 5

कोनीय बिंदु	$Z = -50x + 20y$
(0, 5)	100
(0, 3)	**60**
(1, 0)	**–50**
(6, 0)	**–300** ⟵ सबसे कम

इस सारणी से हम ज्ञात करते हैं कि कोनीय बिंदु (6, 0) पर Z का सबसे कम मान –300 है। क्या हम कह सकते हैं कि Z का न्यूनतम मान –300 है? ध्यान दीजिए कि यदि क्षेत्र परिबद्ध होता तो यह Z का सबसे कम मान (प्रमेय 2 से) होता। लेकिन हम यहाँ देखते हैं कि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। इसलिए –300, Z का न्यूनतम मान हो भी सकता है और नहीं भी। इस समस्या का निष्कर्ष ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित असमीकरण का आलेख खींचते हैं:

$$-50x + 20y < -300$$

अर्थात्
$$-5x + 2y < -30$$

और जाँच कीजिए कि आलेख द्वारा प्राप्त खुले अर्धतल व सुसंगत क्षेत्र में उभयनिष्ठ बिंदु हैं या नहीं है। यदि इसमें उभयनिष्ठ बिंदु हैं, तब Z का न्यूनतम मान –300 नहीं होगा। अन्यथा, Z का न्यूनतम मान –300 होगा।

जैसा कि आकृति 12.5 में दिखाया गया है। इसलिए, $Z = -50x + 20y$, का प्रदत्त व्यवरोधों के परिप्रेक्ष्य में न्यूनतम मान नहीं है।

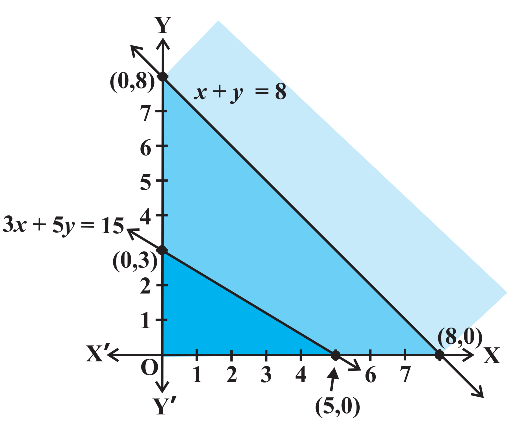
उपरोक्त उदाहरण मे क्या आप जाँच कर सकते हैं कि $Z = -50x + 20y$, (0, 5) पर अधिकतम मान 100 रखता है? इसके लिए, जाँच कीजिए कि क्या $-50x + 20y > 100$ का आरेख सुसंगत क्षेत्र के साथ उभयनिष्ठ बिंदु रखता है।

उदाहरण 5 निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत, $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:

$$x + y \geq 8 \quad \ldots (1)$$
$$3x + 5y \leq 15 \quad \ldots (2)$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

हल असमिकाओं (1) से (3) का आलेख खींचिए (आकृति 12.6)। क्या कोई सुसंगत क्षेत्र है? यह ऐसा क्यों है?

आकृति 12.6 से आप ज्ञात कर सकते है कि ऐसा कोई बिंदु नहीं है जो सभी व्यवरोधों को एक साथ संतुष्ट कर सके। अत:, समस्या का सुसंगत हल नहीं है।



आकृति 12.6

टिप्पणी उदाहरणों से जिनका विवेचन हम अब तक कर चुके हैं जिसके आधार पर हम कुछ रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं की सामान्य विशेषताओं का उल्लेख करते हैं।

(1) सुसंगत क्षेत्र सदैव उत्तल बहुभुज होता है।

(2) उद्देश्य फलन का अधिकतम (या न्यूनतम) हल सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष पर

(कोने पर) स्थित होता है। यदि उद्देश्य फलन के दो कोनीय बिंदु (शीर्ष) एक ही अधिकतम (या न्यूनतम) मान प्रदान करते हैं तो इन बिंदुओं के मिलाने वाली रेखाखंड का प्रत्येक बिंदु भी समान अधिकतम (या न्यूनतम) मान देगा।

प्रश्नावली 12.1

ग्राफ़ीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल कीजिए:

1. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$x + y \le 4, x \ge 0, y \ge 0$

2. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -3x + 4y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \le 8, 3x + 2y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$

3. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 3y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$3x + 5y \le 15, 5x + 2y \le 10, x \ge 0, y \ge 0$

4. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए;
$x + 3y \ge 3, x + y \ge 2, x, y \ge 0$

5. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \le 10, 3x + y \le 15, x, y \ge 0$

6. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:
$2x + y \ge 3, x + 2y \ge 6, x, y \ge 0$

दिखाइए कि Z का न्यूनतम मान दो बिंदुओं से अधिक बिंदुओं पर घटित होता है।

7. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 10y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \le 120, x + y \ge 60, x - 2y \ge 0, x, y \ge 0$

8. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \ge 100, 2x - y \le 0, 2x + y \le 200; x, y \ge 0$

9. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -x + 2y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$x \ge 3, x + y \ge 5, x + 2y \ge 6, y \ge 0$

10. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$x - y \le -1, -x + y \le 0, x, y \ge 0$

ऐतिहासिक टिप्पणी

द्वितीय विश्व युद्ध में, जब युद्ध संचालन की योजना बनी, जिससे कि शत्रुओं को न्यूनतम व्यय पर अधिकतम हानि पहुँचे, रैखिक प्रोग्रामन विधि अस्तित्व में आई।

रैखिक प्रोग्रामन के क्षेत्र में प्रथम प्रोग्रामन का सूत्रपात रूसी गणितज्ञ L.Kantoro Vich तथा अमेरिकी अर्थशास्त्री F.L.Hitch Cock ने 1941 में किए। दोनों ने स्वतंत्र रूप से कार्य किया।

© NCERT not to be republished

इस प्रोग्रामन को परिवहन–समस्या के नाम से जाना गया। सन् 1945 में अंग्रेज अर्थशास्त्री G.Stigler ने रैखिक प्रोग्रामन समस्या, के अंतर्गत इष्टतम आहार संबंधी समस्या का वर्णन किया। सन् 1947 में G.B. Dantzig ने एक दक्षता पूर्ण विधि जो सिंपलेक्स विधि के नाम से प्रसिद्ध है, का सुझाव दिया जो रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को सीमित प्रक्रमों में हल करने की सशक्त विधि है।

रैखिक प्रोग्रामन विधि पर प्रारभिक कार्य करने के कारण सन् 1975 में L.Katorovich और अमेरिकी गणितय अर्थशास्त्री T.C.Koopmans को अर्थ शास्त्र में नोबेल पुरस्कार प्रदान किया गया। परिकलन तथा आवश्यक सॉफ्टवेयर के आगमन के साथ कई क्षेत्रों की जटिल समस्याओं में रैखिक प्रोग्रामन प्रविधि के अनुप्रयोग में उत्तरोतर वृद्धि हो रही है।

© NCERT not to be republished