# 1 गणित में पैटर्न

0675CH01

## 1.1 गणित क्या है?

गणित, पैटर्नों (प्रतिरूपों) की खोज तथा पैटर्नों उनके अस्तित्व के कारण का स्पष्टीकरण है।

पैटर्न सामान्यत: हमारे आस-पास प्रकृति में, हमारे घरों और विद्यालयों में तथा सूर्य, चंद्रमा और तारों की गति में विद्यमान होते हैं। ये पैटर्न हमें खरीदारी से लेकर खाना बनाने में, गेंद फेंकने से लेकर खेल खेलने आदि में दिखाई देते हैं। इसके साथ ही यह मौसम चक्र को समझने एवं प्रौद्योगिकी का उपयोग करने में हमारी सहायता करते हैं।

पैटर्न तथा उन्हें समझना आनंददायक और रचनात्मक कार्य हो सकता है। इसी कारणवश गणितज्ञ, गणित को कला और विज्ञान दोनों के ही रूप में देखते हैं। हमें आशा है कि इस कक्षा में आपको गणितीय पैटर्नों को खोजने और समझने के लिए अनेक रचनात्मक तथा कलात्मक अवसर प्राप्त होंगे।

यह बात ध्यान रखने योग्य कि गणित का लक्ष्य केवल यह ज्ञात करना नहीं है कि कौन-कौन से पैटर्नों का अस्तित्व है, अपितु उनके अस्तित्व के कारणों के स्पष्टीकरणों को भी ज्ञात करना है। तब, ऐसे स्पष्टीकरणों का उपयोग प्राय: ऐसे अनुप्रयोगों में तब किया जा सकता है, जो उन संदर्भों के बाहर हैं जिनमें इनकी खोज की गई थी, और जो मानवता को आगे बढ़ने के लिए प्रेरित करने में सहायता कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, तारों, ग्रहों और उनके उपग्रहों (satellites) की गति के पैटर्नों की समझ ने मानव को गुरूत्वाकर्षण (gravitation) का सिद्धांत विकसित करने तक पहुँचाया। इसी के

© NCERT not to be republished

फलस्वरूप हम चंद्रमा और मंगल पर स्वयं अपने उपग्रह प्रक्षेपित करने और रॉकेट भेजने में सफल हो पाए। इसी प्रकार, जीनोमों (genomes) के पैटर्नों की समझ ने हमें रोगों का पता लगाने और उनका उपचार करने में सहायता की। पैटर्न से संबंधित ऐसे अनेक उदाहरण हैं जिनमें से यह एक हैं।

### आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. क्या आप अन्य उदाहरणों के विषय में सोच सकते हैं, जहाँ गणित दैनिक जीवन में हमारी सहायता करता है?
2. गणित ने किस प्रकार मानव को आगे बढ़ाने के लिए प्रेरित करने में सहायता की है? (आप उन उदाहरणों के विषय में विचार कर सकते हैं जिनमें वैज्ञानिक प्रयोग करना; अपनी अर्थव्यवस्था और लोकतंत्र को चलाना; पुलों, घरों या अन्य जटिल भवनों को निर्मित करना; टी.वी., मोबाइल फोन, कम्प्यूटरों, साइकिलों, रेलगाड़ियों, कारों, वायुयानों, कैलेंडरों, घड़ियों इत्यादि को बनाना सम्मिलित हैं।)

## 1.2 संख्याओं में पैटर्न

गणित में दिखने वाले सबसे अधिक मौलिक पैटर्नों में संख्याओं के पैटर्न हैं, विशेष रूप से पूर्ण संख्याओं के पैटर्न— 0, 1, 2, 3, 4, ...

गणित की वह शाखा जिसमें पूर्ण संख्याओं के पैटर्नों का अध्ययन किया जाता है, **संख्या सिद्धांत** कहलाती है।

**संख्या अनुक्रम** (sequences) सबसे अधिक मौलिक एवं सबसे अधिक आकर्षित करने वाले पैटर्नों के प्रकारों में हैं, जिनका अध्ययन गणितज्ञ करते हैं।

सारणी 1 कुछ मुख्य संख्या अनुक्रमों को दर्शाती है, जिनका गणित में अध्ययन किया जाता है।

© NCERT not to be republished

**सारणी 1— संख्या अनुक्रमों के उदाहरण**

| | |
|---|---|
| 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,.... | (सभी '1') |
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, .... | (गणन संख्याएँ) |
| 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, .... | (विषम संख्याएँ) |
| 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, .... | (सम संख्याएँ) |
| 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, .... | (त्रिभुजाकार संख्याएँ) |
| 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, .... | (वर्ग संख्याएँ) |
| 1, 8, 27, 64, 125, 216, .... | (घन संख्याएँ) |
| 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, .... | (विरहांक संख्याएँ) |
| 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, .... | (2 की घातें) |
| 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, .... | (3 की घातें) |

### आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. क्या आप सारणी 1 में दिए प्रत्येक अनुक्रम में पैटर्न की पहचान कर सकते हैं?
2. सारणी 1 में दिए प्रत्येक अनुक्रम को उसकी अगली तीन संख्याओं सहित अपनी नोटबुक पर पुन: लिखिए। प्रत्येक अनुक्रम के बाद, उस अनुक्रम में संख्याओं को बनाने वाले नियम को अपने शब्दों में लिखिए।

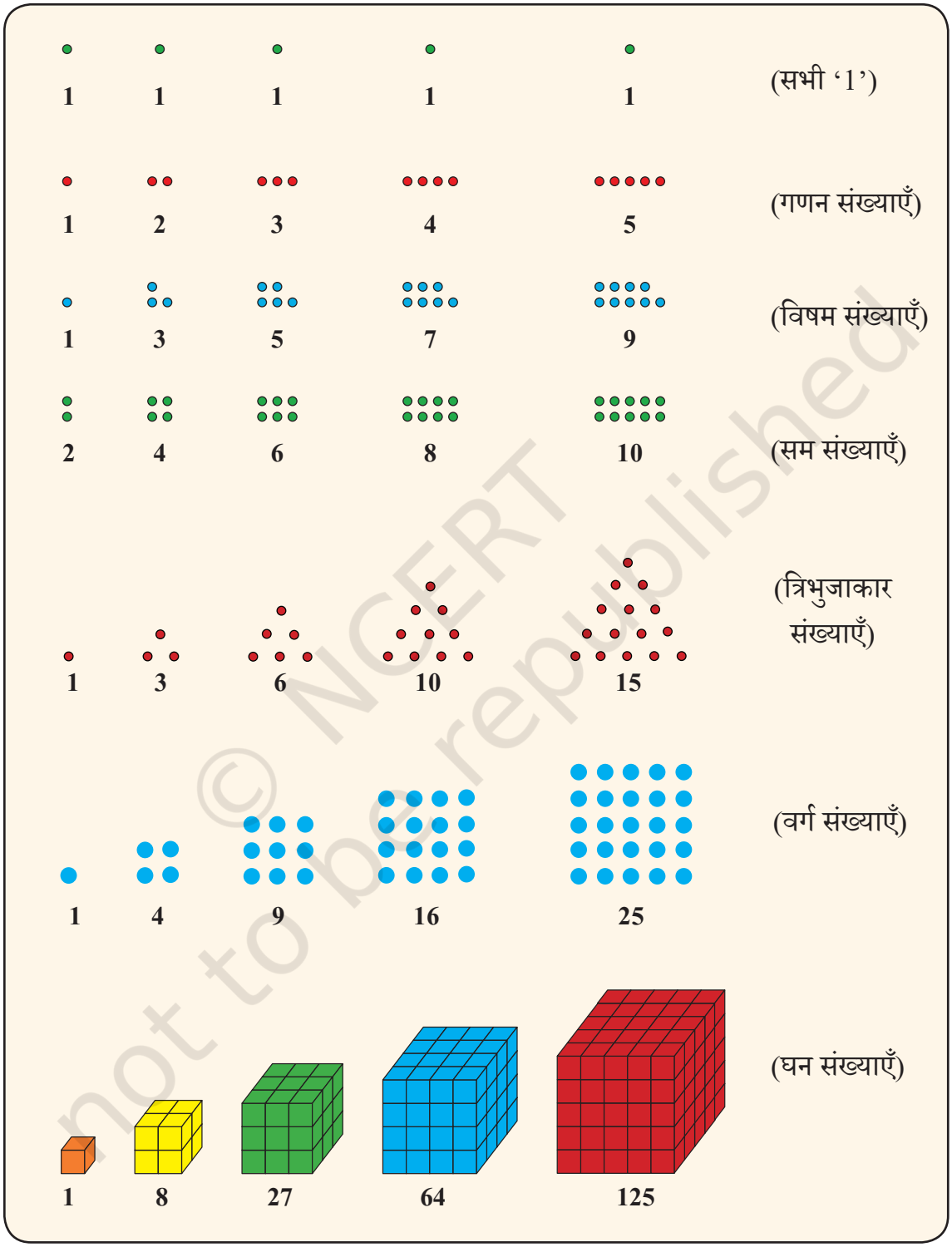
## 1.3 संख्या अनुक्रमों का दृश्यांकन

चित्रों का उपयोग करते हुए अनेक संख्या अनुक्रमों का दृश्यांकन किया जा सकता है। गणितीय वस्तुओं का चित्रों या आरेखों के माध्यम से दृश्यांकन गणितीय पैटर्नों और संकल्पनाओं को समझने का एक अति लाभप्रद तरीका हो सकता है।

आइए, सारणी 1 के प्रथम सात अनुक्रमों को अग्रलिखित चित्रों के माध्यम से दर्शाइए—

© NCERT not to be republished

**सारणी 2— कुछ संख्या अनुक्रमों का चित्रीय निरूपण**



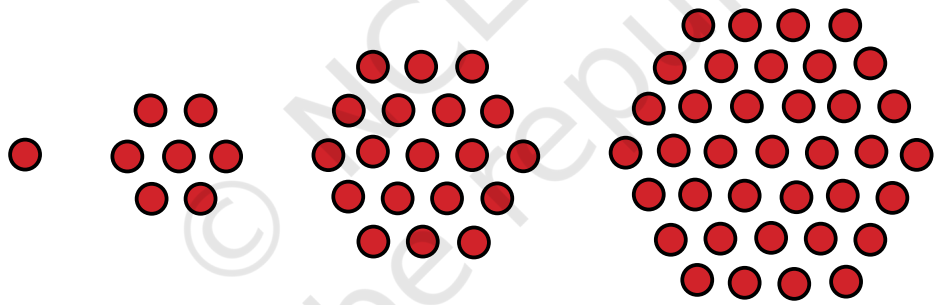

© NCERT not to be republished

## आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. सारणी 2 में दिए संख्या अनुक्रमों को चित्रात्मक रूप से दर्शाने के लिए अपनी नोटबुक में प्रतिलिपि बनाकर प्रत्येक अनुक्रम के लिए अगला चित्र बनाइए।
2. 1, 3, 6, 10, 15, ... **त्रिभुजाकार संख्याएँ** क्यों कहलाती हैं? 1, 4, 9, 16, 25, ... **वर्ग संख्याएँ** या **वर्ग** क्यों कहलाती हैं? 1, 8, 27, 64, 125, ... **घन संख्याएँ** या **घन** क्यों कहलाती हैं?
3. आपने ध्यान दिया होगा कि 36 एक त्रिभुजाकार संख्या और वर्गाकार संख्या दोनों है। अर्थात् 36 बिंदुओं को त्रिभुज और वर्ग दोनों में पूरी तरह व्यवस्थित किया जा सकता है। इसे स्पष्ट करते हुए अपनी नोटबुक में चित्र बनाइए।

   इससे ज्ञात होता है कि एक ही संख्या को अलग-अलग तरीकों से दर्शाया जा सकता है और संदर्भ के आधार पर अलग-अलग भूमिकाएँ निभाई जा सकती हैं। कुछ अन्य संख्याओं को अलग-अलग तरीकों से चित्रात्मक रूप से दर्शाने का प्रयास कीजिए।
4. आप संख्याओं के निम्नलिखित अनुक्रम को क्या कहेंगे?

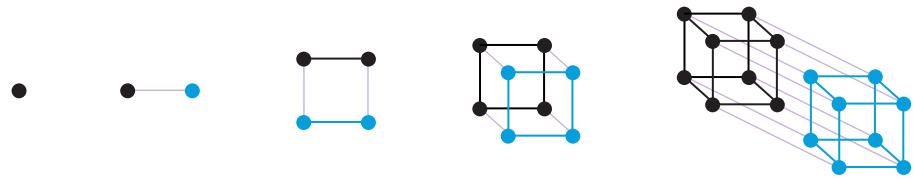


**1** **7** **19** **37**

   इन्हें **षड्भुजाकार** (hexagonal) **संख्याएँ** कहते हैं। इन्हें अपनी नोटबुक में बनाइए। अनुक्रम में अगली संख्या क्या होगी?
5. क्या आप '2 की घात' के अनुक्रम का चित्रीय निरूपण कर सकते हैं? '3 की घात' का?

© NCERT not to be republished

यहाँ '2 की घात' के चित्रात्मक प्रस्तुतीकरण का एक संभावित तरीका दिया है—



1 2 4 8 16

## 1.4 संख्या अनुक्रमों के बीच संबंध

कभी-कभी संख्या अनुक्रम आश्चर्यजनक तरीकों से एक-दूसरे से संबंधित हो सकते हैं।

**उदाहरण**— क्या होता है जब हम विषम संख्याओं को जोड़ना प्रारंभ करते हैं?

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$
$$\vdots$$

वास्तव में यह एक सुंदर पैटर्न है!

ऐसा क्यों होता है? क्या आपको यह लगता है कि सदैव ऐसा ही होता रहेगा?

इसका उत्तर है कि यह पैटर्न सदैव ही चलता रहेगा। अब आप सोच रहे होंगे कि ऐसा क्यों है? जैसा कि पहले बताया जा चुका है, ऐसा पैटर्न होने का कारण उतना ही महत्वपूर्ण और रोमांचक है, जितना कि वह पैटर्न स्वयं।

### एक चित्र इसे स्पष्ट कर सकता है

एक चित्र द्वारा इस तथ्य को समझने में सहायता मिल सकती है। स्मरण कीजिए कि वर्ग संख्याएँ एक वर्ग ग्रिड (grid) में बिंदुओं की गिनती करके बनाई जाती हैं।

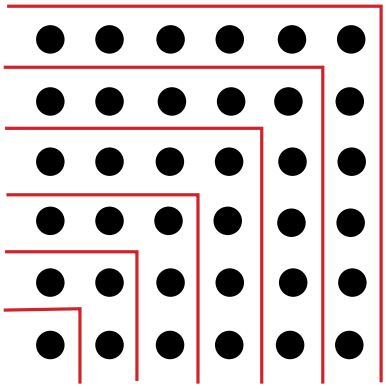
एक वर्गाकार बिंदु ग्रिड में विषम संख्याओं 1, 3, 5, 7 के बिंदुओं को कैसे बाँटा जा सकता है?

गणित चर्चा

आगे पढ़ने से पहले इसके बारे में एक क्षण के लिए सोचिए!

© NCERT not to be republished

नीचे दिए गए पैटर्न में दिखाया गया है कि यह कैसे किया जा सकता है—



यह चित्र दर्शाता है कि

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

क्योंकि इस प्रकार का चित्र किसी भी माप के वर्ग के लिए बनाया जा सकता है, अत: यह स्पष्ट हो जाता है कि विषम संख्याओं को जोड़ने पर वर्ग संख्याएँ क्यों प्राप्त हो जाती हैं।

इसी प्रकार एक अन्य चित्र बनाकर, क्या आप यह बता सकते हैं कि प्रथम 10 विषम संख्याओं का योग क्या है?

अब एक ऐसे ही चित्र की कल्पना कीजिए या आवश्यकतानुसार आंशिक चित्र बनाकर क्या आप बता सकते हैं कि प्रथम 100 विषम संख्याओं का योग क्या है? ऐसे चित्र की कल्पना कीजिए और आवश्यकतानुसार छोटे आकार में बनाकर इसे समझाइए।

**अनुक्रमों के मध्य ऐसे संबंध का एक अन्य उदाहरण—**
**ऊपर और नीचे जोड़ना**

आइए, निम्नलिखित पैटर्न पर ध्यान दीजिए—

$1 = 1$

$1 + 2 + 1 = 4$

$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$

$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$

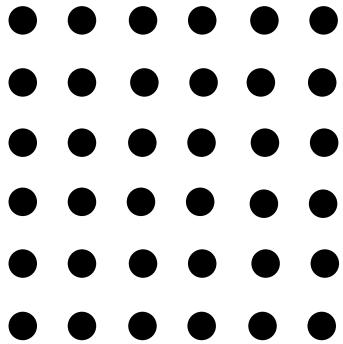
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$

$\vdots$

दिए गए पैटर्न को देखकर यह प्रतीत होता है कि गणन संख्याओं को ऊपर और फिर नीचे जोड़ना वर्ग संख्याएँ प्राप्त करने का एक अन्य तरीका है।

© NCERT not to be republished

क्या आप नीचे दिए गए ग्रिड बिंदु से एक ऐसा ही चित्रात्मक स्पष्टीकरण ज्ञात कर सकते हैं?



## आइए, पता लगाएँ

प्रयास करें

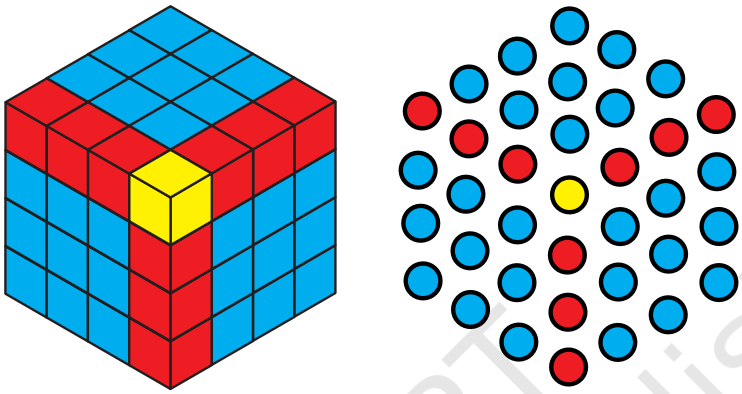
1. गणन संख्याओं को ऊपर और नीचे जोड़ने पर अर्थात् 1, 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 3 + 2 + 1, ..., से वर्ग संख्याएँ क्यों प्राप्त होती हैं, क्या आप इसके लिए एक चित्रीय स्पष्टीकरण दे सकते हैं?
2. इस तस्वीर के बड़े संस्करण की कल्पना करके या आवश्यकतानुसार उसका आंशिक चित्र बनाकर, क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 + 99 + ... + 3 + 2 + 1 का मान क्या होगा?
3. जब आप सभी '1' वाले अनुक्रम को ऊपर की ओर जोड़ना प्रारंभ करते हैं, तब आपको कौन-सा अनुक्रम प्राप्त होता है? जब आप सभी '1' वाले अनुक्रम को ऊपर और नीचे जोड़ते हैं, तब कौन-सा अनुक्रम प्राप्त होता है?
4. जब आप गणन संख्याओं को ऊपर की ओर जोड़ना प्रारंभ करते हैं, तब आपको कौन-सा अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप एक छोटे से चित्र के माध्यम से स्पष्टीकरण दे सकते हैं?
5. जब आप क्रमागत त्रिभुजाकार संख्याओं के युग्मों को जोड़ते हैं तब क्या होता है? उदाहरण के लिए, 1 + 3, 3 + 6, 6 + 10, 10 + 15, … को लीजिए। आप कौन-सा अनुक्रम मिलता है? क्यों? क्या आप इसे एक चित्र द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं?
6. जब आप 1 से प्रारंभ करते हुए 2 की घातों को जोड़ना प्रारंभ करते हैं तब क्या होता है? उदाहरण के लिए, 1, 1 + 2, 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 4 + 8, … लीजिए? अब, इनमें से प्रत्येक संख्या में 1 जोड़ दीजिए— आप कौन-सी संख्याएँ प्राप्त करते हैं? ऐसा क्यों होता है?

© NCERT not to be republished

Reprint 2025-26

7. जब आप त्रिभुजाकार संख्याओं को 6 से गुणा करते हैं और 1 जोड़ते हैं तो क्या होता है? आपको कौन-सा अनुक्रम मिलता है? क्या आप इसे चित्र के माध्यम से समझा सकते हैं?

8. जब आप षड्भुजाकार संख्याओं को जोड़ना प्रारंभ करते हैं तब क्या होता है? उदाहरण के लिए, 1, 1 + 7, 1 + 7 + 19, 1 + 7 + 19 + 37, … लीजिए? आप कौन-सा अनुक्रम प्राप्त करते हैं? क्या आप इसे एक घन के चित्र का उपयोग करते हुए स्पष्ट कर सकते हैं?



9. सारणी 1 में दिए गए अनुक्रमों में और दो भिन्न अनुक्रमों के उनके बीच स्वयं अपनी ओर से अन्य पैटर्न या संबंध खोजिए। क्या एक चित्र या किसी अन्य माध्यम से आप यह स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

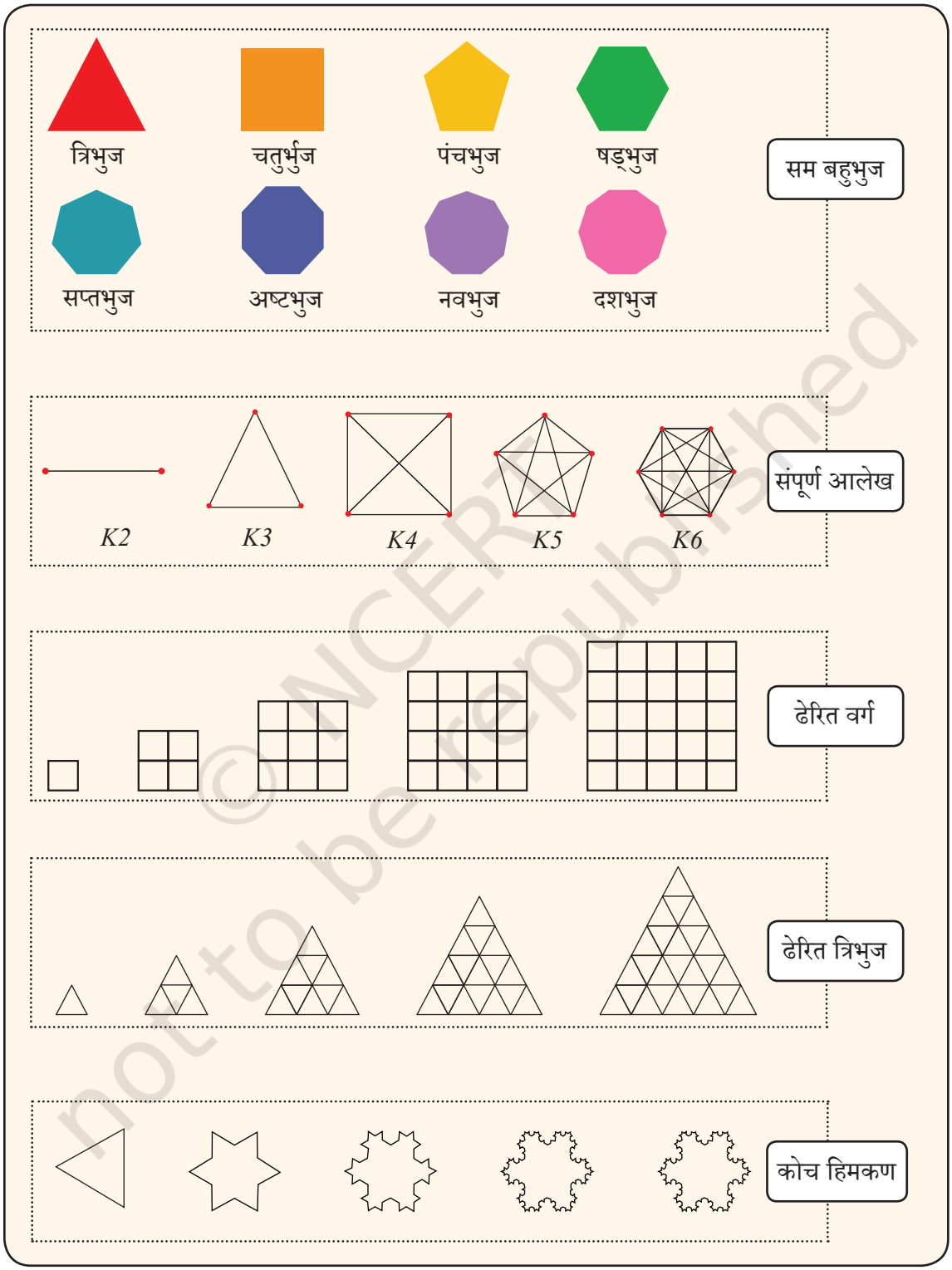
## 1.5 आकारों में पैटर्न

गणित में पाए जाने वाले अन्य महत्वपूर्ण और बुनियादी पैटर्न आकारों के पैटर्न हैं। ये आकार एक, दो या तीन विमाओं (1D, 2D, 3D) में या यहाँ तक कि इनसे अधिक विमाओं (dimensions) में हो सकते हैं। गणित की वह शाखा जिसमें आकारों में पैटर्न का अध्ययन किया जाता है, ज्यामिति कहलाती है।

**आकार अनुक्रम** एक महत्वपूर्ण प्रकार के आकार पैटर्न हैं, जिनका गणितज्ञ अध्ययन करते हैं। सारणी 3 कुछ मुख्य आकार अनुक्रमों को दर्शाती है, जिनका गणित में अध्ययन किया जाता है।

© NCERT not to be republished

**सारणी 3— आकार अनुक्रम के उदाहरण**




© NCERT not to be republished

### आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. क्या आप सारणी 3 के प्रत्येक अनुक्रम में पैटर्न की पहचान कर सकते हैं?
2. सारणी 3 के प्रत्येक अनुक्रम को अपनी नोटबुक में पुन: बनाने का प्रयास कीजिए। क्या आप प्रत्येक अनुक्रम में अगले आकार को खींच सकते हैं? क्यों और क्यों नहीं? प्रत्येक अनुक्रम के बाद, अपने शब्दों में उस नियम या पैटर्न की व्याख्या कीजिए, जिसके अनुसार उस अनुक्रम में आकार बन रहे हैं।

## 1.6 संख्या अनुक्रमों से संबंध

प्राय: आकार अनुक्रम आश्चर्यजनक तरीकों द्वारा संख्या अनुक्रमों से संबंधित होते हैं। ऐसे संबंध आकार अनुक्रम और संबंधित संख्या अनुक्रम दोनों के अध्ययन और समझने में सहायक हो सकते हैं।

**उदाहरण**— सम बहुभुजों (regular polygons) के आकार अनुक्रम में, भुजाओं की संख्याएँ 3 से प्रारंभ करते हुए, अर्थात् 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... गणन संख्याओं द्वारा दी जाती हैं। इसी कारण ये आकार क्रमश:— **सम त्रिभुज, चतुर्भुज** (अर्थात् **वर्ग**), **पंचभुज, षड्भुज, सप्तभुज, अष्टभुज, नवभुज, दशभुज** इत्यादि कहलाते हैं।

शब्द 'सम' यह इंगित करता है कि इन आकारों में 'भुजाओं' की लंबाइयाँ समान हैं और साथ ही 'कोण' भी एक समान हैं (अर्थात् भुजाएँ बराबर दिखाई देती हैं तथा कोने भी समान दिखाई देते हैं)। कोणों के बारे में हम विस्तृत चर्चा अगले अध्याय में करेंगे।

सारणी 3 के अन्य आकार अनुक्रमों का भी संख्या अनुक्रमों के साथ संबंध हैं।

### आइए, पता लगाएँ

प्रयास करें

1. सम बहुभुजों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए। आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? सम बहुभुजों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में आकृतियों के कोनों के विषय में आप क्या कहेंगे? क्या आपको वही संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?
2. संपूर्ण आलेखों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में रेखाओं की संख्याओं की गणना कीजिए। इससे आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

© NCERT not to be republished

3. ढेरित (stacked) वर्गों के अनुक्रम के प्रत्येक आकार में कितने छोटे वर्ग हैं? इससे कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

4. ढेरित त्रिभुजों के अनुक्रम के प्रत्येक आकार में कितने छोटे त्रिभुज हैं? इससे कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है? (संकेत— अनुक्रम के प्रत्येक आकार में, प्रत्येक पंक्ति में कितने त्रिभुज हैं?)

प्रयास करें

5. कोच हिमकण (Koch snowflake) वाले अनुक्रम में, एक आकार से अगला आकार प्राप्त करने कि लिए प्रत्येक रेखाखंड '__' को एक 'गति उभार (speed bump)' __/__ से प्रतिस्थापित करना पड़ता है। जैसे-जैसे इसे अधिक से अधिक बार किया जाता है, वैसे-वैसे परिवर्तन अत्यधिक छोटे-छोटे रेखाखंडों के साथ छोटे तथा और अधिक छोटे होते जाते हैं। कोच हिमकण के प्रत्येक आकार में कुल कितने रेखाखंड हैं? इनके संगत संख्या अनुक्रम क्या हैं? (3, 12, 48, ....., अर्थात् 4 की घात का तीन गुना इसका उत्तर हैं, यह अनुक्रम सारणी में नहीं है।)

## सारांश

- गणित को पैटर्न की खोज और उन पैटर्न के अस्तित्व के स्पष्टीकरण के रूप में देखा जा सकता है।
- गणित में पाए जाने वाले सबसे मौलिक पैटर्न में **संख्या अनुक्रम** हैं।
- संख्या अनुक्रमों के कुछ महत्वपूर्ण उदाहरणों में गणन संख्याएँ, विषम संख्याएँ, सम संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ, त्रिभुजाकार संख्याएँ, घन संख्याएँ, विरहांक संख्याएँ और 2 की घातें सम्मिलित हैं।
- कभी-कभी संख्या अनुक्रम एक दूसरे से आकर्षक और उल्लेखनीय तरीकों से संबंधित हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, 1 से शुरू होने वाली विषम संख्याओं के अनुक्रम को जोड़ने पर वर्ग संख्याएँ प्राप्त होती हैं।
- चित्रों का उपयोग करके संख्या अनुक्रमों के दृश्यांकन से अनुक्रमों और उनके बीच संबंधों को समझने में सहायता प्राप्त हो सकती है।
- **आकार अनुक्रम** गणित में पैटर्न का एक और मौलिक प्रकार है। आकार अनुक्रमों के कुछ महत्वपूर्ण उदाहरणों में सम बहुभुज, संपूर्ण ग्राफ, ढेरित त्रिभुज और वर्ग तथा कोच हिमकण (snowflake) पुनरावृत्तियाँ सम्मिलित होती हैं। आकार अनुक्रम, संख्या अनुक्रमों के साथ अनेक रोचक संबंध भी प्रदर्शित करते हैं।

© NCERT not to be republished

Reprint 2025-26