SET-1

Series BVM/4

कोड नं.
Code No. **65/4/1**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में **4** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **8** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **दो अंक** का है । खण्ड स में **11** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड द में **6** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी खण्ड अ के 1 प्रश्न, खण्ड ब के 3 प्रश्नों में, खण्ड स के 3 प्रश्नों में तथा खण्ड द के 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of **29** questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of **4** questions of **one mark** each, Section B comprises of **8** questions of **two marks** each, Section C comprises of **11** questions of **four marks** each and Section D comprises of **6** questions of **six marks** each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 1 question of Section A, 3 questions of Section B, 3 questions of Section C and 3 questions of Section D. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is **not** permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।
Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. स्वेच्छ अचर A को विलुप्त करते हुए वक्रों $y = \frac{A}{x} + 5$ के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण बनाइए ।

Form the differential equation representing the family of curves $y = \frac{A}{x} + 5$, by eliminating the arbitrary constant A.

2. यदि वर्ग आव्यूह A की कोटि 3 है तथा $|A| = 9$ है, तो $|2 . \text{adj } A|$ का मान लिखिए ।

If A is a square matrix of order 3, with $|A| = 9$, then write the value of $|2 . \text{adj } A|$.

3. समतलों $\vec{r} . (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$ और $\vec{r} . (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$ के बीच का न्यून-कोण ज्ञात कीजिए ।

अथवा

समतल $2x + y - z = 5$ द्वारा x-अक्ष पर काटे गए अंत:खण्ड की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

Find the acute angle between the planes $\vec{r} . (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$ and $\vec{r} . (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$.

OR

Find the length of the intercept, cut off by the plane $2x + y - z = 5$ on the x-axis.

4. यदि $y = \log (\cos e^x)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $y = \log (\cos e^x)$, then find $\frac{dy}{dx}$.

खण्ड ब
SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \, dx$$

Find :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \, dx$$

6. माना संक्रिया $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a * b = 2a + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ से परिभाषित की गई है । जाँच कीजिए कि क्या यह एक द्विआधारी संक्रिया है । यदि हाँ, तो ज्ञात कीजिए कि क्या यह साहचर्य भी है ।

Let $*$ be an operation defined as $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $a * b = 2a + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Check if $*$ is a binary operation. If yes, find if it is associative too.

7. दो बिन्दुओं X और Y के स्थिति सदिश क्रमशः $3\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - 3\vec{b}$ हैं । ऐसे बिन्दु Z का स्थिति सदिश लिखिए जो कि रेखाखण्ड XY को 2 : 1 के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है ।

अथवा

मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ दो सदिश हैं । दर्शाइए कि सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ परस्पर लंबवत् सदिश हैं ।

X and Y are two points with position vectors $3\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} - 3\vec{b}$ respectively. Write the position vector of a point Z which divides the line segment XY in the ratio 2 : 1 externally.

OR

Let $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ be two vectors. Show that the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ are perpendicular to each other.

8. यदि A और B सममित आव्यूह इस प्रकार हैं कि AB तथा BA दोनों परिभाषित हैं, तो सिद्ध कीजिए कि AB – BA एक विषम सममित आव्यूह है ।

If A and B are symmetric matrices, such that AB and BA are both defined, then prove that AB – BA is a skew symmetric matrix.

9. 12 कार्ड जिन पर 1 से 12 तक की संख्याएँ अंकित हैं (एक कार्ड पर एक संख्या), को एक डिब्बे में रखकर अच्छी तरह से मिलाया गया । तब डिब्बे में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया । यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर की संख्या 5 से बड़ी है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह एक विषम संख्या है ।

12 cards numbered 1 to 12 (one number on one card), are placed in a box and mixed up thoroughly. Then a card is drawn at random from the box. If it is known that the number on the drawn card is greater than 5, find the probability that the card bears an odd number.

10. एक विद्यालय के 8 विशिष्ट विद्यार्थियों, जिनमें 3 लड़के और 5 लड़कियाँ हैं, में से एक प्रश्नोत्तर प्रतियोगिता के लिए 4 विद्यार्थियों की एक टीम का चयन किया जाना है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि 2 लड़कों और 2 लड़कियों का चयन किया गया हो ।

अथवा

एक बहुविकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के तीन संभावित उत्तर हैं । इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगा कर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर दे देगा ?

Out of 8 outstanding students of a school, in which there are 3 boys and 5 girls, a team of 4 students is to be selected for a quiz competition. Find the probability that 2 boys and 2 girls are selected.

OR

In a multiple choice examination with three possible answers for each of the five questions, what is the probability that a candidate would get four or more correct answers just by guessing ?

11. निम्न अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + y = \cos x - \sin x$$

Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} + y = \cos x - \sin x$$

12. ज्ञात कीजिए :

$$\int x \, . \tan^{-1} x \; dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}}$$

Find :

$$\int x \cdot \tan^{-1} x \; dx$$

OR

Find :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}}$$

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. यदि $\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$ है, तो सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके x का मान ज्ञात कीजिए ।

Using properties of determinants, find the value of x for which

$$\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0 .$$

14. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ को हल कीजिए, दिया गया है कि $y = 1$ है जब $x = 0$ है ।

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि $y = 1$ है जब $x = 0$ है ।

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$, given that y = 1 when x = 0.

OR

Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, given that y = 1 when x = 0.

15. मान लीजिए कि A = R – {2} और B = R – {1} हैं । यदि $f : A \to B$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ द्वारा परिभाषित फलन है, तो दर्शाइए कि f एकैकी तथा आच्छादक है । अत: f^{-1} ज्ञात कीजिए ।

अथवा

दर्शाइए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \leq x \leq 12\}$ में
$S = \{(a, b) : a, b \in Z, |a - b|$, 3 से भाज्य है} द्वारा प्रदत्त संबंध S एक तुल्यता संबंध है ।

Let A = R – {2} and B = R – {1}. If $f : A \to B$ is a function defined by $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$, show that f is one-one and onto. Hence, find f^{-1}.

OR

Show that the relation S in the set $A = \{x \in Z : 0 \leq x \leq 12\}$ given by $S = \{(a, b) : a, b \in Z, |a - b| \text{ is divisible by } 3\}$ is an equivalence relation.

16. फलन $\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+b)}$ का, x के सापेक्ष, समाकलन कीजिए ।

Integrate the function $\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+b)}$ w.r.t. x.

17. यदि x = sin t, y = sin pt है, तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2y = 0$.

अथवा

$\cos^{-1} x^2$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}\right]$ का अवकलन कीजिए ।

If $x = \sin t$, $y = \sin pt$, prove that $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + p^2y = 0$.

OR

Differentiate $\tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}\right]$ with respect to $\cos^{-1} x^2$.

18. सिद्ध कीजिए कि :

$$\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$$

Prove that :

$$\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$$

19. यदि $y = (x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $y = (x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$, find $\dfrac{dy}{dx}$.

20. सिद्ध कीजिए कि $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$, अत: $\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Prove that $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$, and hence evaluate $\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx$.

21. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए चार बिन्दु A(x, –1, –1), B(4, 5, 1), C(3, 9, 4) और D(– 4, 4, 4) समतलीय हों ।

Find the value of x, for which the four points A(x, –1, –1), B(4, 5, 1), C(3, 9, 4) and D(– 4, 4, 4) are coplanar.

22. एक 13 m लंबी सीढ़ी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे झुकी हुई है । सीढ़ी के नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश दीवार से दूर 2 cm/sec की दर से खींचा जाता है । दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जब सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 5 m की दूरी पर है ?

A ladder 13 m long is leaning against a vertical wall. The bottom of the ladder is dragged away from the wall along the ground at the rate of 2 cm/sec. How fast is the height on the wall decreasing when the foot of the ladder is 5 m away from the wall ?

23. बिन्दुओं A(3, –1, 2), B(5, 2, 4) और C(–1, –1, 6) से निर्धारित समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए । अत: इस प्रकार प्राप्त समतल की मूल-बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of the plane determined by the points A(3, –1, 2), B(5, 2, 4) and C(–1, –1, 6). Hence, find the distance of the plane, thus obtained, from the origin.

खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. समाकलन के प्रयोग से एक दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के अंतर्गत बन सकने वाले बड़े-से-बड़े आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration, find the area of the greatest rectangle that can be inscribed in an ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

25. एक बीमा कम्पनी 3000 साइकिल चालक, 6000 स्कूटर चालक और 9000 कार चालकों का बीमा करती है । एक साइकिल चालक, स्कूटर चालक व कार चालक की दुर्घटना होने की प्रायिकता क्रमश: 0·3, 0·05 और 0·02 हैं । बीमाकृत व्यक्तियों में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है । उस व्यक्ति के साइकिल चालक होने की प्रायिकता क्या है ?

An insurance company insured 3000 cyclists, 6000 scooter drivers and 9000 car drivers. The probability of an accident involving a cyclist, a scooter driver and a car driver are 0·3, 0·05 and 0·02 respectively. One of the insured persons meets with an accident. What is the probability that he is a cyclist ?

26. प्रारंभिक पंक्ति रूपान्तरणों द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

अथवा

निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को आव्यूहों के प्रयोग से हल कीजिए :

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

Using elementary row transformations, find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

OR

Using matrices, solve the following system of linear equations :

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

27. समाकलन के प्रयोग से परवलय $y^2 = 4x$ और वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

अथवा

समाकलन विधि का उपयोग करते हुए ऐसे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो कि रेखाओं $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ और $x - 5y + 9 = 0$ से घिरा हुआ है ।

Using integration, find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and the circle $4x^2 + 4y^2 = 9$.

OR

Using the method of integration, find the area of the region bounded by the lines $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ and $x - 5y + 9 = 0$.

28. एक आहारविद् दो प्रकार के भोज्यों को इस प्रकार मिलाना चाहता है कि मिश्रण में विटामिन A की कम-से-कम 8 मात्रक और विटामिन C की कम-से-कम 10 मात्रक हों । भोज्य I में विटामिन A की मात्रा 2 इकाई/किग्रा है और विटामिन C की मात्रा 1 इकाई/किग्रा है । भोज्य I के उत्पादन के लिए ₹ 50 प्रति किग्रा की लागत आती है । भोज्य II में विटामिन A की मात्रा 1 इकाई/किग्रा और विटामिन C की मात्रा 2 इकाई/किग्रा है और इसके उत्पादन के लिए ₹ 70 प्रति किग्रा की लागत आती है । इस प्रश्न को एक ऐसे मिश्रण जिसमें वांछित पोषक तत्त्व हों, का न्यूनतम मूल्य ज्ञात करने के लिए रैखिक प्रोग्रामन समस्या में बदलें । मिश्रण का न्यूनतम मूल्य भी ज्ञात कीजिए ।

A dietician wishes to mix two types of food in such a way that the vitamin contents of the mixture contains at least 8 units of vitamin A and 10 units of vitamin C. Food I contains 2 units/kg of vitamin A and 1 unit/kg of vitamin C. It costs ₹ 50 per kg to produce food I. Food II contains 1 unit/kg of vitamin A and 2 units/kg of vitamin C and it costs ₹ 70 per kg to produce food II. Formulate this problem as a LPP to minimise the cost of a mixture that will produce the required diet. Also find the minimum cost.

29. बिंदु (2, 3, 2) से गुज़रने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि रेखा $\vec{r} = (-2\hat{i} + 3\hat{j}) + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के समांतर है । अत: इन दो रेखाओं के बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

बिंदु P(3, 2, 1) से समतल $2x - y + z + 1 = 0$ पर खींचे गए लंब के पाद Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए । लम्बवत् दूरी PQ भी ज्ञात कीजिए तथा इसी समतल को एक दर्पण लेते हुए इस बिंदु P का प्रतिबिम्ब भी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of a line passing through the point (2, 3, 2) and parallel to the line $\vec{r} = (-2\hat{i} + 3\hat{j}) + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$. Also, find the distance between these two lines.

OR

Find the coordinates of the foot of the perpendicular Q drawn from P(3, 2, 1) to the plane $2x - y + z + 1 = 0$. Also, find the distance PQ and the image of the point P treating this plane as a mirror.

SET-2

Series BVM/4

कोड नं.
Code No. **65/4/2**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में* ***29*** *प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में* ***4*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***एक अंक*** *का है । खण्ड ब में* ***8*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***दो अंक*** *का है । खण्ड स में* ***11*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***चार अंक*** *का है । खण्ड द में* ***6*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***छः अंक*** *का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी खण्ड अ के 1 प्रश्न, खण्ड ब के 3 प्रश्नों में, खण्ड स के 3 प्रश्नों में तथा खण्ड द के 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति* ***नहीं*** *है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of* ***29*** *questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of* ***4*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***8*** *questions of* ***two marks*** *each, Section C comprises of* ***11*** *questions of* ***four marks*** *each and Section D comprises of* ***6*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 1 question of Section A, 3 questions of Section B, 3 questions of Section C and 3 questions of Section D. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।
Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. यदि वर्ग आव्यूह A की कोटि 3 है तथा $|A| = 9$ है, तो $|2 \cdot \text{adj } A|$ का मान लिखिए ।

If A is a square matrix of order 3, with $|A| = 9$, then write the value of $|2 \cdot \text{adj } A|$.

2. समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$ और $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$ के बीच का न्यून-कोण ज्ञात कीजिए ।

अथवा

समतल $2x + y - z = 5$ द्वारा x-अक्ष पर काटे गए अंत:खण्ड की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

Find the acute angle between the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$ and $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$.

OR

Find the length of the intercept, cut off by the plane $2x + y - z = 5$ on the x-axis.

3. यदि $y = \text{cosec}\,(\cot \sqrt{x})$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $y = \text{cosec}\,(\cot \sqrt{x})$, then find $\frac{dy}{dx}$.

4. अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ का समाकलन गुणक लिखिए ।

Write the integrating factor of the differential equation $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. 12 कार्ड जिन पर 1 से 12 तक की संख्याएँ अंकित हैं (एक कार्ड पर एक संख्या), को एक डिब्बे में रखकर अच्छी तरह से मिलाया गया । तब डिब्बे में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया । यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर की संख्या 5 से बड़ी है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह एक विषम संख्या है ।

12 cards numbered 1 to 12 (one number on one card), are placed in a box and mixed up thoroughly. Then a card is drawn at random from the box. If it is known that the number on the drawn card is greater than 5, find the probability that the card bears an odd number.

6. एक विद्यालय के 8 विशिष्ट विद्यार्थियों, जिनमें 3 लड़के और 5 लड़कियाँ हैं, में से एक प्रश्नोत्तर प्रतियोगिता के लिए 4 विद्यार्थियों की एक टीम का चयन किया जाना है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि 2 लड़कों और 2 लड़कियों का चयन किया गया हो ।

अथवा

एक बहुविकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के तीन संभावित उत्तर हैं । इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगा कर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर दे देगा ?

Out of 8 outstanding students of a school, in which there are 3 boys and 5 girls, a team of 4 students is to be selected for a quiz competition. Find the probability that 2 boys and 2 girls are selected.

OR

In a multiple choice examination with three possible answers for each of the five questions, what is the probability that a candidate would get four or more correct answers just by guessing ?

7. ज्ञात कीजिए :

$$\int x \cdot \tan^{-1} x \; dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}}$$

Find :

$$\int x \cdot \tan^{-1} x \; dx$$

OR

Find :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}}$$

8. ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\, dx$$

Find :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\, dx$$

9. दो बिन्दुओं X और Y के स्थिति सदिश क्रमशः $3\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - 3\vec{b}$ हैं । ऐसे बिन्दु Z का स्थिति सदिश लिखिए जो कि रेखाखण्ड XY को 2 : 1 के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है ।

अथवा

मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ दो सदिश हैं । दर्शाइए कि सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ परस्पर लंबवत् सदिश हैं ।

X and Y are two points with position vectors $3\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} - 3\vec{b}$ respectively. Write the position vector of a point Z which divides the line segment XY in the ratio 2 : 1 externally.

OR

Let $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ be two vectors. Show that the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ are perpendicular to each other.

10. यदि A और B सममित आव्यूह इस प्रकार हैं कि AB तथा BA दोनों परिभाषित हैं, तो सिद्ध कीजिए कि AB – BA एक विषम सममित आव्यूह है ।

If A and B are symmetric matrices, such that AB and BA are both defined, then prove that AB – BA is a skew symmetric matrix.

11. माना संक्रिया $* : N \times N \to N$ इस प्रकार परिभाषित है कि सभी $a, b \in N$ के लिए $a * b = a + ab$ है । जाँच कीजिए कि क्या $*$ एक द्विआधारी संक्रिया है । यदि हाँ, तो ज्ञात कीजिए कि क्या यह संक्रिया साहचर्य भी है ।

Let $* : N \times N \to N$ be an operation defined as $a * b = a + ab$, $\forall\ a, b \in N$. Check if $*$ is a binary operation. If yes, find if it is associative too.

12. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dx}{dy} + x = (\tan y + \sec^2 y)$$

Solve the following differential equation :

$$\frac{dx}{dy} + x = (\tan y + \sec^2 y)$$

खण्ड स
SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. यदि $y = (x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $y = (x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$, find $\frac{dy}{dx}$.

14. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$, अत: $\int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Prove that $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$, and hence evaluate $\int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx$.

15. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए चार बिन्दु A(x, –1, –1), B(4, 5, 1), C(3, 9, 4) और D(– 4, 4, 4) समतलीय हों ।

Find the value of x, for which the four points A(x, –1, –1), B(4, 5, 1), C(3, 9, 4) and D(– 4, 4, 4) are coplanar.

16. एक 13 m लंबी सीढ़ी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे झुकी हुई है । सीढ़ी के नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश दीवार से दूर 2 cm/sec की दर से खींचा जाता है । दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जब सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 5 m की दूरी पर है ?

A ladder 13 m long is leaning against a vertical wall. The bottom of the ladder is dragged away from the wall along the ground at the rate of 2 cm/sec. How fast is the height on the wall decreasing when the foot of the ladder is 5 m away from the wall ?

17. बिन्दुओं A(3, –1, 2), B(5, 2, 4) और C(–1, –1, 6) से निर्धारित समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए । अत: इस प्रकार प्राप्त समतल की मूल-बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of the plane determined by the points A(3, –1, 2), B(5, 2, 4) and C(–1, –1, 6). Hence, find the distance of the plane, thus obtained, from the origin.

18. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ को हल कीजिए, दिया गया है कि $y = 1$ है जब $x = 0$ है ।

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि $y = 1$ है जब $x = 0$ है ।

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$, given that $y = 1$ when $x = 0$.

OR

Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, given that $y = 1$ when $x = 0$.

19. मान लीजिए कि $A = R - \{2\}$ और $B = R - \{1\}$ हैं । यदि $f : A \rightarrow B$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ द्वारा परिभाषित फलन है, तो दर्शाइए कि f एकैकी तथा आच्छादक है । अत: f^{-1} ज्ञात कीजिए ।

अथवा

दर्शाइए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \leq x \leq 12\}$ में
$S = \{(a, b) : a, b \in Z, |a - b|$, 3 से भाज्य है} द्वारा प्रदत्त संबंध S एक तुल्यता संबंध है ।

Let $A = R - \{2\}$ and $B = R - \{1\}$. If $f : A \to B$ is a function defined by $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, show that f is one-one and onto. Hence, find f^{-1}.

OR

Show that the relation S in the set $A = \{x \in Z : 0 \leq x \leq 12\}$ given by $S = \{(a, b) : a, b \in Z, |a - b|$ is divisible by 3} is an equivalence relation.

20. यदि $x = \sin t$, $y = \sin pt$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2) \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + p^2y = 0.$

अथवा

$\cos^{-1} x^2$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}\right]$ का अवकलन कीजिए ।

If $x = \sin t$, $y = \sin pt$, prove that $(1 - x^2) \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + p^2y = 0.$

OR

Differentiate $\tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}\right]$ with respect to $\cos^{-1} x^2$.

21. यदि $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = k\,(x^3 + y^3)$ है, तो सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से k का मान ज्ञात कीजिए ।

Using properties of determinants, find the value of k if

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = k\,(x^3 + y^3)$$

22. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{1}{\sin(x-a)\cos(x-b)}\, dx$$

Find :

$$\int \frac{1}{\sin(x-a)\cos(x-b)}\, dx$$

23. सिद्ध कीजिए कि :

$$\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{36}{77}\right)$$

Prove that :

$$\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{36}{77}\right)$$

खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. प्रारंभिक पंक्ति रूपान्तरणों द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

अथवा

निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को आव्यूहों के प्रयोग से हल कीजिए :

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

Using elementary row transformations, find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

OR

Using matrices, solve the following system of linear equations :

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

25. समाकलन के प्रयोग से परवलय $y^2 = 4x$ और वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

अथवा

समाकलन विधि का उपयोग करते हुए ऐसे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो कि रेखाओं $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ और $x - 5y + 9 = 0$ से घिरा हुआ है ।

Using integration, find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and the circle $4x^2 + 4y^2 = 9$.

OR

Using the method of integration, find the area of the region bounded by the lines $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ and $x - 5y + 9 = 0$.

26. एक आहारविद् दो प्रकार के भोज्यों को इस प्रकार मिलाना चाहता है कि मिश्रण में विटामिन A की कम-से-कम 8 मात्रक और विटामिन C की कम-से-कम 10 मात्रक हों । भोज्य I में विटामिन A की मात्रा 2 इकाई/किग्रा है और विटामिन C की मात्रा 1 इकाई/किग्रा है । भोज्य I के उत्पादन के लिए ₹ 50 प्रति किग्रा की लागत आती है । भोज्य II में विटामिन A की मात्रा 1 इकाई/किग्रा और विटामिन C की मात्रा 2 इकाई/किग्रा है और इसके उत्पादन के लिए ₹ 70 प्रति किग्रा की लागत आती है । इस प्रश्न को एक ऐसे मिश्रण जिसमें वांछित पोषक तत्त्व हों, का न्यूनतम मूल्य ज्ञात करने के लिए रैखिक प्रोग्रामन समस्या में बदलें । मिश्रण का न्यूनतम मूल्य भी ज्ञात कीजिए ।

A dietician wishes to mix two types of food in such a way that the vitamin contents of the mixture contains at least 8 units of vitamin A and 10 units of vitamin C. Food I contains 2 units/kg of vitamin A and 1 unit/kg of vitamin C. It costs ₹ 50 per kg to produce food I. Food II contains 1 unit/kg of vitamin A and 2 units/kg of vitamin C and it costs ₹ 70 per kg to produce food II. Formulate this problem as a LPP to minimise the cost of a mixture that will produce the required diet. Also find the minimum cost.

27. बिंदु (2, 3, 2) से गुज़रने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि रेखा $\vec{r} = (-2\hat{i} + 3\hat{j}) + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के समांतर है । अत: इन दो रेखाओं के बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

बिंदु P(3, 2, 1) से समतल $2x - y + z + 1 = 0$ पर खींचे गए लंब के पाद Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए । लम्बवत् दूरी PQ भी ज्ञात कीजिए तथा उसी समतल को एक दर्पण लेते हुए इस बिंदु P का प्रतिबिम्ब भी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of a line passing through the point (2, 3, 2) and parallel to the line $\vec{r} = (-2\hat{i} + 3\hat{j}) + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$. Also, find the distance between these two lines.

OR

Find the coordinates of the foot of the perpendicular Q drawn from P(3, 2, 1) to the plane $2x - y + z + 1 = 0$. Also, find the distance PQ and the image of the point P treating this plane as a mirror.

28. समाकलन के प्रयोग से रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration, find the area of the region bounded by the line $y = 3x + 2$, the x-axis and the ordinates $x = -2$ and $x = 1$.

29. तीन सिक्के दिए गए हैं । एक सिक्के के दोनों तरफ पट है । दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें पट 70% बार प्रकट होता है और तीसरा अनभिनत सिक्का है । तीनों में से एक सिक्के को यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया है । यदि सिक्के पर पट प्रकट हुआ हो, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह दोनों तरफ पट वाला सिक्का है ।

There are three coins. One is a coin having tails on both faces, another is a biased coin that comes up tails 70% of the time and the third is an unbiased coin. One of the coins is chosen at random and tossed, it shows tail. Find the probability that it was a coin with tail on both the faces.

SET-3

Series BVM/4

कोड नं.
Code No. **65/4/3**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours — *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में* ***29*** *प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में* ***4*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***एक अंक*** *का है । खण्ड ब में* ***8*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***दो अंक*** *का है । खण्ड स में* ***11*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***चार अंक*** *का है । खण्ड द में* ***6*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***छः अंक*** *का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी खण्ड अ के 1 प्रश्न, खण्ड ब के 3 प्रश्नों में, खण्ड स के 3 प्रश्नों में तथा खण्ड द के 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति* ***नहीं*** *है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of* ***29*** *questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of* ***4*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***8*** *questions of* ***two marks*** *each, Section C comprises of* ***11*** *questions of* ***four marks*** *each and Section D comprises of* ***6*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 1 question of Section A, 3 questions of Section B, 3 questions of Section C and 3 questions of Section D. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।
Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$ और $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$ के बीच का न्यून-कोण ज्ञात कीजिए ।

अथवा

समतल $2x + y - z = 5$ द्वारा x-अक्ष पर काटे गए अंत:खण्ड की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

Find the acute angle between the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$ and $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$.

OR

Find the length of the intercept, cut off by the plane $2x + y - z = 5$ on the x-axis.

2. यदि $y = \log(\cos e^x)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $y = \log(\cos e^x)$, then find $\frac{dy}{dx}$.

3. A एक वर्ग आव्यूह है तथा $|A| = 4$ है । तो $|A \cdot (\text{adj } A)|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

A is a square matrix with $|A| = 4$. Then find the value of $|A \cdot (\text{adj } A)|$.

4. स्वेच्छ अचर A को विलुप्त करते हुए वक्रों $y = A \sin x$ के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण बनाइए ।

Form the differential equation representing the family of curves $y = A \sin x$, by eliminating the arbitrary constant A.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. ज्ञात कीजिए :

$$\int x \cdot \tan^{-1} x \, dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}}$$

Find :

$$\int x \,.\, \tan^{-1} x \;\; dx$$

OR

Find :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$$

6. निम्न अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + y = \cos x - \sin x$$

Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} + y = \cos x - \sin x$$

7. ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\, dx$$

Find :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\, dx$$

8. माना संक्रिया $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a * b = 2a + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ से परिभाषित की गई है । जाँच कीजिए कि क्या यह एक द्विआधारी संक्रिया है । यदि हाँ, तो ज्ञात कीजिए कि क्या यह साहचर्य भी है ।

Let $*$ be an operation defined as $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $a * b = 2a + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Check if $*$ is a binary operation. If yes, find if it is associative too.

9. दो बिन्दुओं X और Y के स्थिति सदिश क्रमशः $3\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - 3\vec{b}$ हैं । ऐसे बिन्दु Z का स्थिति सदिश लिखिए जो कि रेखाखण्ड XY को 2 : 1 के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है ।

अथवा

मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ दो सदिश हैं । दर्शाइए कि सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ परस्पर लंबवत् सदिश हैं ।

X and Y are two points with position vectors $3\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} - 3\vec{b}$ respectively. Write the position vector of a point Z which divides the line segment XY in the ratio 2 : 1 externally.

OR

Let $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ be two vectors. Show that the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ are perpendicular to each other.

10. एक विद्यालय के 8 विशिष्ट विद्यार्थियों, जिनमें 3 लड़के और 5 लड़कियाँ हैं, में से एक प्रश्नोत्तर प्रतियोगिता के लिए 4 विद्यार्थियों की एक टीम का चयन किया जाना है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि 2 लड़कों और 2 लड़कियों का चयन किया गया हो ।

अथवा

एक बहुविकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के तीन संभावित उत्तर हैं । इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगा कर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर दे देगा ?

Out of 8 outstanding students of a school, in which there are 3 boys and 5 girls, a team of 4 students is to be selected for a quiz competition. Find the probability that 2 boys and 2 girls are selected.

OR

In a multiple choice examination with three possible answers for each of the five questions, what is the probability that a candidate would get four or more correct answers just by guessing ?

11. एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ हैं । यदि दोनों, स्वतंत्र रूप से, समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि समस्या हल हो जाती है ।

The probabilities of solving a specific problem independently by A and B are $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{5}$ respectively. If both try to solve the problem independently, find the probability that the problem is solved.

12. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए $(A + A')$ ज्ञात कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि यह सममित आव्यूह है ।

For the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, find $(A + A')$ and verify that it is a symmetric matrix.

खण्ड स
SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।
Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. एक 13 m लंबी सीढ़ी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे झुकी हुई है । सीढ़ी के नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश दीवार से दूर 2 cm/sec की दर से खींचा जाता है । दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जब सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 5 m की दूरी पर है ?

A ladder 13 m long is leaning against a vertical wall. The bottom of the ladder is dragged away from the wall along the ground at the rate of 2 cm/sec. How fast is the height on the wall decreasing when the foot of the ladder is 5 m away from the wall ?

14. सिद्ध कीजिए कि :

$$\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$$

Prove that :

$$\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$$

15. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$, अत: $\int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Prove that $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$, and hence evaluate $\int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx$.

16. यदि $x = \sin t$, $y = \sin pt$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2y = 0$.

अथवा

$\cos^{-1} x^2$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right]$ का अवकलन कीजिए ।

If $x = \sin t$, $y = \sin pt$, prove that $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2y = 0$.

OR

Differentiate $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right]$ with respect to $\cos^{-1} x^2$.

17. फलन $\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+b)}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए ।

Integrate the function $\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+b)}$ w.r.t. x.

18. मान लीजिए कि $A = R - \{2\}$ और $B = R - \{1\}$ हैं । यदि $f : A \to B$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ द्वारा परिभाषित फलन है, तो दर्शाइए कि f एकैकी तथा आच्छादक है । अत: f^{-1} ज्ञात कीजिए ।

अथवा

दर्शाइए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$ में
$S = \{(a, b) : a, b \in Z, |a-b|, 3$ से भाज्य है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध S एक तुल्यता संबंध है ।

Let A = R – {2} and B = R – {1}. If $f : A \to B$ is a function defined by $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$, show that f is one-one and onto. Hence, find f^{-1}.

OR

Show that the relation S in the set $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$ given by $S = \{(a, b) : a, b \in Z, |a - b| \text{ is divisible by } 3\}$ is an equivalence relation.

19. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ को हल कीजिए, दिया गया है कि $y = 1$ है जब $x = 0$ है ।

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि $y = 1$ है जब $x = 0$ है ।

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$, given that $y = 1$ when $x = 0$.

OR

Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, given that $y = 1$ when $x = 0$.

20. यदि $\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$ है, तो सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके x का मान ज्ञात कीजिए ।

Using properties of determinants, find the value of x for which

$$\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0.$$

21. समतलों $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$ और $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ की प्रतिच्छेदन रेखा को अंतर्विष्ट करने वाले और समतल $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ के लंबवत्, समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of the plane which contains the line of intersection of the planes $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$, $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ and which is perpendicular to the plane $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$.

22. यदि चार बिंदु जिनके स्थिति सदिश $A(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$, $B(4\hat{i}+x\hat{j}+5\hat{k})$, $C(4\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$ तथा $D(6\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k})$ समतलीय हैं, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

Find the value of x such that the four points with position vectors, $A(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$, $B(4\hat{i}+x\hat{j}+5\hat{k})$, $C(4\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$ and $D(6\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k})$ are coplanar.

23. यदि $y=(\log x)^x+x^{\log x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $y=(\log x)^x+x^{\log x}$, find $\frac{dy}{dx}$.

खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. बिंदु (2, 3, 2) से गुज़रने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि रेखा $\vec{r}=(-2\hat{i}+3\hat{j})+\lambda(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})$ के समांतर है । अत: इन दो रेखाओं के बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

बिंदु P(3, 2, 1) से समतल $2x-y+z+1=0$ पर खींचे गए लंब के पाद Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए । लम्बवत् दूरी PQ भी ज्ञात कीजिए तथा उसी समतल को एक दर्पण लेते हुए इस बिंदु P का प्रतिबिम्ब भी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of a line passing through the point (2, 3, 2) and parallel to the line $\vec{r} = (-2\hat{i} + 3\hat{j}) + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$. Also, find the distance between these two lines.

OR

Find the coordinates of the foot of the perpendicular Q drawn from P(3, 2, 1) to the plane $2x - y + z + 1 = 0$. Also, find the distance PQ and the image of the point P treating this plane as a mirror.

25. प्रारंभिक पंक्ति रूपान्तरणों द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

अथवा

निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को आव्यूहों के प्रयोग से हल कीजिए :

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

Using elementary row transformations, find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

OR

Using matrices, solve the following system of linear equations :

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

26. समाकलन के प्रयोग से परवलय $y^2 = 4x$ और वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

अथवा

समाकलन विधि का उपयोग करते हुए ऐसे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो कि रेखाओं $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ और $x - 5y + 9 = 0$ से घिरा हुआ है ।

Using integration, find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and the circle $4x^2 + 4y^2 = 9$.

OR

Using the method of integration, find the area of the region bounded by the lines $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ and $x - 5y + 9 = 0$.

27. एक बीमा कम्पनी 3000 साइकिल चालक, 6000 स्कूटर चालक और 9000 कार चालकों का बीमा करती है । एक साइकिल चालक, स्कूटर चालक व कार चालक की दुर्घटना होने की प्रायिकता क्रमश: 0·3, 0·05 और 0·02 हैं । बीमाकृत व्यक्तियों में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है । उस व्यक्ति के साइकिल चालक होने की प्रायिकता क्या है ?

An insurance company insured 3000 cyclists, 6000 scooter drivers and 9000 car drivers. The probability of an accident involving a cyclist, a scooter driver and a car driver are 0·3, 0·05 and 0·02 respectively. One of the insured persons meets with an accident. What is the probability that he is a cyclist ?

28. समाकलन के प्रयोग से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ तथा रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration, find the area of the smaller region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ and the line $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

29. एक निर्माणकर्ता नट और बोल्ट का उत्पादन करता है । एक पैकेट नटों के निर्माण में मशीन A पर 1 घंटा और मशीन B पर 3 घंटे काम करना पड़ता है, जबकि एक पैकेट बोल्ट के निर्माण में 3 घंटे मशीन A पर और 1 घंटा मशीन B पर काम करना पड़ता है । वह नटों से ₹ 35 प्रति पैकेट तथा बोल्टों से ₹ 14 प्रति पैकेट लाभ कमाता है । यदि प्रतिदिन प्रत्येक मशीन का अधिकतम उपयोग 12 घंटे किया जाए, तो प्रत्येक के कितने पैकेट उत्पादित किए जाएँ ताकि अधिकतम लाभ कमाया जा सके ? इसे रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।

A manufacturer produces nuts and bolts. It takes 1 hour of work on machine A and 3 hours on machine B to produce a package of nuts. It takes 3 hours on machine A and 1 hour on machine B to produce a package of bolts. He earns a profit of ₹ 35 per package of nuts and ₹ 14 per package of bolts. How many packages of each should be produced each day so as to maximise his profit, if he operates each machine for atmost 12 hours a day ? Convert it into an LPP and solve graphically.