कोड नं.
Code No. **65/1/1**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

नोट	NOTE
(I) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **15** हैं ।	(I) Please check that this question paper contains **15** printed pages.
(II) प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।	(II) Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
(III) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **36** प्रश्न हैं ।	(III) Please check that this question paper contains **36** questions.
(IV) कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।	(IV) Please write down the Serial Number of the question in the answer-book before attempting it.
(V) इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।	(V) 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 80*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 80*

सामान्य निर्देश :

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख़्ती से पालन कीजिए :

(i) *यह प्रश्न-पत्र* ***चार*** *खण्डों में विभाजित किया गया है – क, ख, ग एवं घ । इस प्रश्न–पत्र में* ***36*** *प्रश्न हैं ।* ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) ***खण्ड क*** *में प्रश्न संख्या* ***1*** *से* ***20*** *तक* ***20*** *प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न* ***1*** *अंक का है ।*

(iii) ***खण्ड ख*** *में प्रश्न संख्या* ***21*** *से* ***26*** *तक* ***6*** *प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न* ***2*** *अंकों का है ।*

(iv) ***खण्ड ग*** *में प्रश्न संख्या* ***27*** *से* ***32*** *तक* ***6*** *प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न* ***4*** *अंकों का है ।*

(v) ***खण्ड घ*** *में प्रश्न संख्या* ***33*** *से* ***36*** *तक* ***4*** *प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न* ***6*** *अंकों का है ।*

(vi) *प्रश्न-पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है । तथापि एक-एक अंक वाले तीन प्रश्नों में, दो-दो अंकों वाले दो प्रश्नों में, चार-चार अंकों वाले दो प्रश्नों में और छः-छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं । ऐसे प्रश्नों में से केवल एक ही विकल्प का उत्तर लिखिए ।*

(vii) *इसके अतिरिक्त, आवश्यकतानुसार, प्रत्येक खण्ड और प्रश्न के साथ यथोचित निर्देश दिए गए हैं ।*

(viii) *केलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति* ***नहीं*** *है ।*

खण्ड क

प्रश्न संख्या 1 से 20 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं । सही विकल्प चुनिए ।

1. यदि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है तथा $|A| = 5$ है, तो $|2A'|$ का मान होगा

(A) -10

(B) 10

(C) -40

(D) 40

2. यदि A एक वर्ग आव्यूह है तथा $A^2 = A$ हो, तो $(I - A)^3 + A$ बराबर है

(A) I

(B) 0

(C) I – A

(D) I + A

3. $\tan^{-1}\left(\tan \frac{3\pi}{5}\right)$ का मुख्य मान है

(A) $\frac{2\pi}{5}$

(B) $\frac{-2\pi}{5}$

(C) $\frac{3\pi}{5}$

(D) $\frac{-3\pi}{5}$

General Instructions :

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

(i) *This question paper comprises **four** Sections A, B, C and D. This question paper carries **36** questions. **All** questions are compulsory.*

(ii) ***Section A** – Questions no. **1** to **20** comprises of **20** questions of **1** mark each.*

(iii) ***Section B** – Questions no. **21** to **26** comprises of **6** questions of **2** marks each.*

(iv) ***Section C** – Questions no. **27** to **32** comprises of **6** questions of **4** marks each.*

(v) ***Section D** – Questions no. **33** to **36** comprises of **4** questions of **6** marks each.*

(vi) *There is no overall choice in the question paper. However, an internal choice has been provided in 3 questions of one mark, 2 questions of two marks, 2 questions of four marks and 2 questions of six marks. Only one of the choices in such questions have to be attempted.*

(vii) *In addition to this, separate instructions are given with each section and question, wherever necessary.*

(viii) *Use of calculators is **not** permitted.*

SECTION A

Question numbers 1 to 20 carry 1 mark each.

Question numbers 1 to 10 are multiple choice type questions. Select the correct option.

1. If A is a square matrix of order 3 and $|A| = 5$, then the value of $|2A'|$ is

(A) -10

(B) 10

(C) -40

(D) 40

2. If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then $(I - A)^3 + A$ is equal to

(A) I

(B) 0

(C) I – A

(D) I + A

3. The principal value of $\tan^{-1}\left(\tan \frac{3\pi}{5}\right)$ is

(A) $\frac{2\pi}{5}$

(B) $\frac{-2\pi}{5}$

(C) $\frac{3\pi}{5}$

(D) $\frac{-3\pi}{5}$

4. यदि सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{k}$ पर प्रक्षेप शून्य है, तो λ का मान होगा

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{-2}{3}$

(D) $\frac{-3}{2}$

5. समतल $z = 0$ के लंबवत् तथा बिन्दु $(-1, 5, 4)$ से गुज़रने वाली रेखा का सदिश समीकरण होगा

(A) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + \hat{j})$

(B) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + (4 + \lambda)\hat{k}$

(C) $\vec{r} = \hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\hat{k}$

(D) $\vec{r} = \lambda\hat{k}$

6. कोटि 2 वाले अवकल समीकरण के विशेष हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या होगी

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

7. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$ बराबर है

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

4. If the projection of $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ on $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{k}$ is zero, then the value of λ is

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{-2}{3}$

(D) $\frac{-3}{2}$

5. The vector equation of the line passing through the point (–1, 5, 4) and perpendicular to the plane z = 0 is

(A) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + \hat{j})$

(B) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + (4 + \lambda)\hat{k}$

(C) $\vec{r} = \hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\hat{k}$

(D) $\vec{r} = \lambda\hat{k}$

6. The number of arbitrary constants in the particular solution of a differential equation of second order is (are)

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

7. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$ is equal to

(A) –1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

8. बिन्दु (4, – 7, 3) से y-अक्ष पर डाले गए लम्ब की लम्बाई होगी

(A) 3 इकाई

(B) 4 इकाई

(C) 5 इकाई

(D) 7 इकाई

9. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, जहाँ $P(A) = \frac{1}{3}$ व $P(B) = \frac{1}{4}$ है, तो $P(B'|A)$ बराबर है

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) 1

10. रैखिक असमिकाओं के निकाय से नियत सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 0), (4, 0), (2, 4) तथा (0, 5) हैं । यदि $z = ax + by$, जहाँ $a, b > 0$ का अधिकतम मान बिन्दुओं (2, 4) तथा (4, 0) दोनों पर हो, तो

(A) $a = 2b$

(B) $2a = b$

(C) $a = b$

(D) $3a = b$

प्रश्न संख्या 11 से 15 तक के सभी प्रश्नों के खाली स्थान भरिए ।

11. यदि समस्त $a_1, a_2 \in A$ के लिए $(a_1, a_2) \in R$ से $(a_2, a_1) \in R$ प्राप्त हो, तो समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R कहलाता है __________ ।

12. $f(x) = [x], 0 < x < 2$ द्वारा परिभाषित महत्तम पूर्णांक फलन x = __________ पर अवकलनीय नहीं होता है ।

13. यदि आव्यूह A की कोटि 3×2 है, तो आव्यूह A' की कोटि होगी __________ ।

अथवा

एक वर्ग आव्यूह A विषम-सममित आव्यूह होगा, यदि __________ ।

8. The length of the perpendicular drawn from the point (4, – 7, 3) on the y-axis is

(A) 3 units

(B) 4 units

(C) 5 units

(D) 7 units

9. If A and B are two independent events with $P(A) = \frac{1}{3}$ and $P(B) = \frac{1}{4}$, then $P(B' \mid A)$ is equal to

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) 1

10. The corner points of the feasible region determined by the system of linear inequalities are (0, 0), (4, 0), (2, 4) and (0, 5). If the maximum value of $z = ax + by$, where $a, b > 0$ occurs at both (2, 4) and (4, 0), then

(A) $a = 2b$

(B) $2a = b$

(C) $a = b$

(D) $3a = b$

Fill in the blanks in question numbers 11 to 15.

11. A relation R in a set A is called __________, if $(a_1, a_2) \in R$ implies $(a_2, a_1) \in R$, for all $a_1, a_2 \in A$.

12. The greatest integer function defined by $f(x) = [x], 0 < x < 2$ is not differentiable at x = __________ .

13. If A is a matrix of order 3×2, then the order of the matrix A' is __________ .

OR

A square matrix A is said to be skew-symmetric, if __________ .

14. वक्र $y^2 = 8x$ के मूल-बिन्दु पर अभिलंब का समीकरण है __________ ।

अथवा

एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 cm/s की दर से बढ़ रही है । उस क्षण पर जबकि वृत्त की त्रिज्या 2 cm है, वृत्त के क्षेत्रफल में __________ cm^2/s की दर से बढ़ोतरी होगी ।

15. दो बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमश: $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ और $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ हैं । बिन्दु P, जो रेखाखण्ड AB को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है, का स्थिति सदिश है ___________ ।

प्रश्न संख्या 16 से 20 अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न हैं ।

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ है, तो A (adj A) ज्ञात कीजिए ।

17. ज्ञात कीजिए :

$$\int x^4 \log x \, dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \, dx$$

18. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^3 |2x - 1| \, dx$$

19. ताश की 52 पत्तों वाली अच्छी प्रकार से फेंटी गई गड्डी में से यादृच्छया तथा बिना प्रतिस्थापना के एक-एक कर के दो पत्ते निकाले गए । एक पत्ता लाल तथा दूसरा काले रंग का आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

20. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$$

14. The equation of the normal to the curve $y^2 = 8x$ at the origin is __________ .

OR

The radius of a circle is increasing at the uniform rate of 3 cm/sec. At the instant when the radius of the circle is 2 cm, its area increases at the rate of __________ cm^2/s.

15. The position vectors of two points A and B are $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ and $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, respectively. The position vector of a point P which divides the line segment joining A and B in the ratio 2 : 1 is __________ .

Question numbers 16 to 20 are very short answer type questions.

16. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, then find A (adj A).

17. Find :

$$\int x^4 \log x \, dx$$

OR

Find :

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \, dx$$

18. Evaluate :

$$\int_1^3 |2x - 1| \, dx$$

19. Two cards are drawn at random and one-by-one without replacement from a well-shuffled pack of 52 playing cards. Find the probability that one card is red and the other is black.

20. Find :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$$

खण्ड ख

प्रश्न संख्या 21 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है ।

21. सिद्ध कीजिए कि :

$\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\cos^{-1}x, \; \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1.$

अथवा

$f : R_+ \to (7, \infty)$, $f(x) = 16x^2 + 24x + 7$ द्वारा परिभाषित एकैकी और आच्छादक फलन पर विचार कीजिए, जहाँ R_+ सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है । फलन f का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए ।

22. यदि $x = at^2, \; y = 2at$ हो, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

23. वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 4x$ के वे बिन्दु ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श-रेखाएँ, रेखा $4x + y - 3 = 0$ के समांतर हैं ।

24. एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जो प्रत्येक सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लम्बवत् हो, जहाँ $\vec{a} = 5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ और $\vec{b} = 7\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$.

अथवा

उस समांतर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $2\vec{a}, -\vec{b}$ तथा $3\vec{c}$ द्वारा निरूपित हैं, जहाँ

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$,

$\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा

$\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ हैं ।

25. k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए रेखाएँ $x = -y = kz$ तथा $x - 2 = 2y + 1 = -z + 1$ एक-दूसरे पर लम्ब हैं ।

26. एक व्यस्त चौराहे X पर, हरी बत्ती मिलने की प्रायिकता 30% है । इस चौराहे X पर तीन में से लगातार दो दिन हरी बत्ती के मिलने की प्रायिकता क्या है ?

SECTION B

Question numbers 21 to 26 carry 2 marks each.

21. Prove that $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\cos^{-1}x$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$.

OR

Consider a bijective function $f : R_+ \to (7, \infty)$ given by $f(x) = 16x^2 + 24x + 7$, where R_+ is the set of all positive real numbers. Find the inverse function of f.

22. If $x = at^2$, $y = 2at$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

23. Find the points on the curve $y = x^3 - 3x^2 - 4x$ at which the tangent lines are parallel to the line $4x + y - 3 = 0$.

24. Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ where $\vec{a} = 5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ and $\vec{b} = 7\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$.

OR

Find the volume of the parallelopiped whose adjacent edges are represented by $2\vec{a}$, $-\vec{b}$ and $3\vec{c}$, where

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$,

$\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$, and

$\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$.

25. Find the value of k so that the lines $x = -y = kz$ and $x - 2 = 2y + 1 = -z + 1$ are perpendicular to each other.

26. The probability of finding a green signal on a busy crossing X is 30%. What is the probability of finding a green signal on X on two consecutive days out of three ?

खण्ड ग

प्रश्न संख्या 27 से 32 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है ।

27. माना N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है । संबंध R, $N \times N$ पर "(a, b) R (c, d) यदि और केवल यदि ad = bc, सभी a, b, c, d $\in$ N के लिए" द्वारा परिभाषित है । दिखाइए कि संबंध R एक तुल्यता संबंध है ।

28. यदि $y = e^{x^2 \cos x} + (\cos x)^x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

29. ज्ञात कीजिए :

$$\int \sec^3 x \, dx$$

30. अवकल समीकरण $y\, e^y\, dx = (y^3 + 2x\, e^y)\, dy$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

अथवा

अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} = y - x \tan\left(\frac{y}{x}\right)$, जहाँ x = 1 पर $y = \frac{\pi}{4}$ है, का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए ।

31. एक फर्नीचर व्यापारी अपनी धनराशि को मेज़ों या कुर्सियों या दोनों के संयोजनों में निवेश करता है । निवेश के लिए उसके पास ₹ 50,000 हैं और उसके पास अधिकतम 35 वस्तुओं को रखने के लिए स्थान उपलब्ध है । एक कुर्सी का क्रय मूल्य ₹ 1,000 व एक मेज़ का क्रय मूल्य ₹ 2,000 है । इस व्यापारी को एक कुर्सी बेचकर ₹ 150 व एक मेज़ को बेचकर ₹ 250 का लाभ अर्जित होता है । उपर्युक्त समस्या के लिए अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए और आलेखीय विधि से समस्या को हल कीजिए ।

32. दो थैले I और II दिए गए हैं । थैले I में 3 लाल तथा 5 काली गेंदें हैं जबकि थैले II में 4 लाल तथा 3 काली गेंदें हैं । थैले I से थैले II में एक गेंद यादृच्छया स्थानांतरित की जाती है और तत्पश्चात् थैले II में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है । यदि यह निकाली गई गेंद काली गेंद है, तो स्थानांतरित की गई गेंद के काले रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

अथवा

एक कलश में 5 लाल, 2 सफेद तथा 3 काली गेंदें हैं । एक-एक करके, बिना प्रतिस्थापना के, इस कलश से 3 गेंदें यादृच्छया निकाली जाती हैं । सफेद गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । निकाली गई सफेद गेंदों की संख्या का माध्य व प्रसरण भी ज्ञात कीजिए ।

SECTION C

Question numbers 27 to 32 carry 4 marks each.

27. Let N be the set of natural numbers and R be the relation on $N \times N$ defined by (a, b) R (c, d) iff ad = bc for all a, b, c, d $\in$ N. Show that R is an equivalence relation.

28. If $y = e^{x^2 \cos x} + (\cos x)^x$, then find $\frac{dy}{dx}$.

29. Find :

$$\int \sec^3 x \, dx$$

30. Find the general solution of the differential equation

$$y\, e^y\, dx = (y^3 + 2x\, e^y)\, dy.$$

OR

Find the particular solution of the differential equation

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \tan\left(\frac{y}{x}\right), \text{ given that } y = \frac{\pi}{4} \text{ at } x = 1.$$

31. A furniture trader deals in only two items — chairs and tables. He has ₹ 50,000 to invest and a space to store at most 35 items. A chair costs him ₹ 1,000 and a table costs him ₹ 2,000. The trader earns a profit of ₹ 150 and ₹ 250 on a chair and table, respectively. Formulate the above problem as an LPP to maximise the profit and solve it graphically.

32. There are two bags, I and II. Bag I contains 3 red and 5 black balls and Bag II contains 4 red and 3 black balls. One ball is transferred randomly from Bag I to Bag II and then a ball is drawn randomly from Bag II. If the ball so drawn is found to be black in colour, then find the probability that the transferred ball is also black.

OR

An urn contains 5 red, 2 white and 3 black balls. Three balls are drawn, one-by-one, at random without replacement. Find the probability distribution of the number of white balls. Also, find the mean and the variance of the number of white balls drawn.

खण्ड घ

प्रश्न संख्या 33 से 36 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है ।

33. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए और इसका प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$$x + 2y - 3z = 6$$
$$3x + 2y - 2z = 3$$
$$2x - y + z = 2$$

अथवा

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

34. समाकलन विधि से, त्रिभुज जिसके शीर्ष (2, – 2), (4, 5) तथा (6, 2) हैं, से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

35. दिखाइए कि त्रिज्या r व ऊँचाई h के लम्ब-वृत्तीय शंकु के अन्तर्गत अधिकतम आयतन के लम्ब-वृत्तीय बेलन की ऊँचाई, शंकु की ऊँचाई की एक-तिहाई है और बेलन का अधिकतम आयतन, शंकु के आयतन का $\frac{4}{9}$वाँ भाग है ।

36. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसमें बिन्दु A(2, 1, – 1) स्थित है तथा जो समतलों $2x + y - z = 3$ और $x + 2y + z = 2$ की प्रतिच्छेदन रेखा के लम्बवत् है । प्राप्त समतल व y-अक्ष के बीच का कोण भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

रेखा $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ तथा समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 6$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु Q की बिन्दु P(– 2, – 4, 7) से दूरी ज्ञात कीजिए । रेखा PQ का सदिश समीकरण भी लिखिए ।

SECTION D

Question numbers 33 to 36 carry 6 marks each.

33. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, then find A^{-1} and use it to solve the following system of the equations :

$$x + 2y - 3z = 6$$

$$3x + 2y - 2z = 3$$

$$2x - y + z = 2$$

OR

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

34. Using integration, find the area of the region bounded by the triangle whose vertices are (2, – 2), (4, 5) and (6, 2).

35. Show that the height of the right circular cylinder of greatest volume which can be inscribed in a right circular cone of height h and radius r is one-third of the height of the cone, and the greatest volume of the cylinder is $\frac{4}{9}$ times the volume of the cone.

36. Find the equation of the plane that contains the point A(2, 1, – 1) and is perpendicular to the line of intersection of the planes 2x + y – z = 3 and x + 2y + z = 2. Also find the angle between the plane thus obtained and the y-axis.

OR

Find the distance of the point P(– 2, – 4, 7) from the point of intersection Q of the line $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ and the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 6$. Also write the vector equation of the line PQ.

Series HMJ/1

SET-2

कोड नं.
Code No. **65/1/2**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

	नोट		NOTE
(I)	कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **15** हैं ।	(I)	Please check that this question paper contains **15** printed pages.
(II)	प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।	(II)	Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
(III)	कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **36** प्रश्न हैं ।	(III)	Please check that this question paper contains **36** questions.
(IV)	कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।	(IV)	Please write down the Serial Number of the question in the answer-book before attempting it.
(V)	इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।	(V)	15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : 80*

Time allowed : 3 hours — *Maximum Marks : 80*

सामान्य निर्देश :

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख़्ती से पालन कीजिए :

(i) *यह प्रश्न-पत्र **चार** खण्डों में विभाजित किया गया है – क, ख, ग एवं घ । इस प्रश्न–पत्र में **36** प्रश्न हैं । **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) ***खण्ड क** में प्रश्न संख्या **1** से **20** तक **20** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।*

(iii) ***खण्ड ख** में प्रश्न संख्या **21** से **26** तक **6** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **2** अंकों का है ।*

(iv) ***खण्ड ग** में प्रश्न संख्या **27** से **32** तक **6** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **4** अंकों का है ।*

(v) ***खण्ड घ** में प्रश्न संख्या **33** से **36** तक **4** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **6** अंकों का है ।*

(vi) *प्रश्न-पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है । तथापि एक-एक अंक वाले तीन प्रश्नों में, दो-दो अंकों वाले दो प्रश्नों में, चार-चार अंकों वाले दो प्रश्नों में और छः-छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं । ऐसे प्रश्नों में से केवल एक ही विकल्प का उत्तर लिखिए ।*

(vii) *इसके अतिरिक्त, आवश्यकतानुसार, प्रत्येक खण्ड और प्रश्न के साथ यथोचित निर्देश दिए गए हैं ।*

(viii) *केलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।*

खण्ड क

प्रश्न संख्या 1 से 20 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं । सही विकल्प चुनिए ।

1. यदि A एक 3×3 आव्यूह है और $|A| = -2$ है, तो $|A\,(\text{adj}\,A)|$ का मान होगा

(A) -2

(B) 2

(C) -8

(D) 8

2. कोटि 2 वाले अवकल समीकरण के विशेष हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या होगी

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

3. $\cos^{-1}\left(\cos \frac{13\pi}{6}\right)$ का मुख्य मान है

(A) $\frac{13\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{6}$

General Instructions :

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

(i) *This question paper comprises **four** Sections A, B, C and D. This question paper carries **36** questions. **All** questions are compulsory.*

(ii) ***Section A** – Questions no. **1** to **20** comprises of **20** questions of **1** mark each.*

(iii) ***Section B** – Questions no. **21** to **26** comprises of **6** questions of **2** marks each.*

(iv) ***Section C** – Questions no. **27** to **32** comprises of **6** questions of **4** marks each.*

(v) ***Section D** – Questions no. **33** to **36** comprises of **4** questions of **6** marks each.*

(vi) *There is no overall choice in the question paper. However, an internal choice has been provided in 3 questions of one mark, 2 questions of two marks, 2 questions of four marks and 2 questions of six marks. Only one of the choices in such questions have to be attempted.*

(vii) *In addition to this, separate instructions are given with each section and question, wherever necessary.*

(viii) *Use of calculators is **not** permitted.*

SECTION A

Question numbers 1 to 20 carry 1 mark each.

Question numbers 1 to 10 are multiple choice type questions. Select the correct option.

1. If A is a 3×3 matrix and $|A| = -2$, then value of $|A\,(\text{adj}\,A)|$ is

(A) -2

(B) 2

(C) -8

(D) 8

2. The number of arbitrary constants in the particular solution of a differential equation of second order is (are)

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

3. The principal value of $\cos^{-1}\left(\cos \frac{13\pi}{6}\right)$ is

(A) $\frac{13\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{6}$

4. रैखिक असमिकाओं के निकाय से नियत सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 0), (4, 0), (2, 4) तथा (0, 5) हैं । यदि $z = ax + by$, जहाँ $a, b > 0$ का अधिकतम मान बिन्दुओं (2, 4) तथा (4, 0) दोनों पर हो, तो

(A) $a = 2b$

(B) $2a = b$

(C) $a = b$

(D) $3a = b$

5. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, जहाँ $P(A) = \frac{1}{3}$ व $P(B) = \frac{1}{4}$ है, तो $P(B'|A)$ बराबर है

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) 1

6. यदि A एक वर्ग आव्यूह है तथा $A^2 = A$ हो, तो $(I - A)^3 + A$ बराबर है

(A) I

(B) 0

(C) $I - A$

(D) $I + A$

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$, जहाँ $x \neq 0$, बराबर है

(A) -2

(B) 0

(C) 1

(D) π

4. The corner points of the feasible region determined by the system of linear inequalities are (0, 0), (4, 0), (2, 4) and (0, 5). If the maximum value of $z = ax + by$, where $a, b > 0$ occurs at both (2, 4) and (4, 0), then

(A) $a = 2b$

(B) $2a = b$

(C) $a = b$

(D) $3a = b$

5. If A and B are two independent events with $P(A) = \frac{1}{3}$ and $P(B) = \frac{1}{4}$, then $P(B' \mid A)$ is equal to

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) 1

6. If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then $(I - A)^3 + A$ is equal to

(A) I

(B) 0

(C) $I - A$

(D) $I + A$

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$, where $x \neq 0$, is equal to

(A) -2

(B) 0

(C) 1

(D) π

8. बिन्दु (2, –1, 5) का समतल $\vec{r} \cdot \hat{i} = 0$ में प्रतिबिम्ब होगा

(A) (–2, –1, 5)

(B) (2, 1, –5)

(C) (–2, 1, –5)

(D) (2, 0, 0)

9. यदि सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{k}$ पर प्रक्षेप शून्य है, तो λ का मान होगा

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{-2}{3}$

(D) $\frac{-3}{2}$

10. समतल z = 0 के लंबवत् तथा बिन्दु (– 1, 5, 4) से गुज़रने वाली रेखा का सदिश समीकरण होगा

(A) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + \hat{j})$

(B) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + (4 + \lambda)\hat{k}$

(C) $\vec{r} = \hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\hat{k}$

(D) $\vec{r} = \lambda\hat{k}$

प्रश्न संख्या 11 से 15 तक के सभी प्रश्नों के खाली स्थान भरिए ।

11. दो बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमश: $\vec{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{OB} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ हैं । बिन्दु P, जो रेखाखण्ड AB को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है, का स्थिति सदिश है __________ ।

12. वक्र $y^2 = 8x$ के मूल-बिन्दु पर अभिलंब का समीकरण है __________ ।

अथवा

एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 cm/s की दर से बढ़ रही है । उस क्षण पर जबकि वृत्त की त्रिज्या 2 cm है, वृत्त के क्षेत्रफल में __________ cm^2/s की दर से बढ़ोतरी होगी ।

8. The image of the point (2, – 1, 5) in the plane $\vec{r} \cdot \hat{i} = 0$ is

(A) (– 2, – 1, 5)

(B) (2, 1, – 5)

(C) (– 2, 1, – 5)

(D) (2, 0, 0)

9. If the projection of $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ on $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{k}$ is zero, then the value of λ is

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{-2}{3}$

(D) $\frac{-3}{2}$

10. The vector equation of the line passing through the point (–1, 5, 4) and perpendicular to the plane z = 0 is

(A) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + \hat{j})$

(B) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + (4 + \lambda)\hat{k}$

(C) $\vec{r} = \hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\hat{k}$

(D) $\vec{r} = \lambda\hat{k}$

Fill in the blanks in question numbers 11 to 15.

11. The position vectors of two points A and B are $\vec{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{OB} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, respectively. The position vector of a point P which divides the line segment joining A and B in the ratio 2 : 1 is ___________ .

12. The equation of the normal to the curve $y^2 = 8x$ at the origin is ___________ .

OR

The radius of a circle is increasing at the uniform rate of 3 cm/sec. At the instant when the radius of the circle is 2 cm, its area increases at the rate of ___________ cm^2/s.

13. आव्यूह समीकरण $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ में प्रारंभिक स्तंभ संक्रिया $C_2 \to C_2 - 3C_1$ के प्रयोग से समीकरण के दायीं ओर होगा ______________ ।

अथवा

एक वर्ग आव्यूह A सममित आव्यूह होगा यदि ___________ ।

14. यदि समस्त $a_1, a_2 \in A$ के लिए $(a_1, a_2) \in R$ से $(a_2, a_1) \in R$ प्राप्त हो, तो समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R कहलाता है _________ ।

15. $f(x) = [x], 0 < x < 2$ द्वारा परिभाषित महत्तम पूर्णांक फलन $x =$ __________ पर अवकलनीय नहीं होता है ।

प्रश्न संख्या 16 से 20 अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न हैं ।

16. यदि A कोटि 3 का एक व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है तथा $A^2 = 2A$ हो, तो $|A|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

17. ताश की 52 पत्तों वाली अच्छी प्रकार से फेंटी गई गड्डी में से यादृच्छया तथा बिना प्रतिस्थापना के एक-एक कर के दो पत्ते निकाले गए । एक पत्ता लाल तथा दूसरा काले रंग का आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

18. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^3 |2x - 1| \, dx$$

19. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$$

20. ज्ञात कीजिए :

$$\int x^4 \log x \, dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \, dx$$

13. On applying elementary column operation $C_2 \to C_2 - 3C_1$ in the matrix equation $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, the RHS (Right Hand Side) of the equation becomes ________________ .

OR

A square matrix A is said to be symmetric if ____________ .

14. A relation R in a set A is called __________, if $(a_1, a_2) \in R$ implies $(a_2, a_1) \in R$, for all $a_1, a_2 \in A$.

15. The greatest integer function defined by $f(x) = [x], 0 < x < 2$ is not differentiable at x = ___________ .

Question numbers 16 to 20 are very short answer type questions.

16. If A is a non-singular square matrix of order 3 and $A^2 = 2A$, then find the value of $|A|$.

17. Two cards are drawn at random and one-by-one without replacement from a well-shuffled pack of 52 playing cards. Find the probability that one card is red and the other is black.

18. Evaluate :

$$\int_1^3 |2x - 1| \, dx$$

19. Find :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$$

20. Find :

$$\int x^4 \log x \, dx$$

OR

Find :

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \, dx$$

खण्ड ख

प्रश्न संख्या 21 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है ।

21. एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जो प्रत्येक सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लम्बवत् हो, जहाँ $\vec{a} = 5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ और $\vec{b} = 7\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$.

अथवा

उस समांतर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $2\vec{a}, -\vec{b}$ तथा $3\vec{c}$ द्वारा निरूपित हैं, जहाँ

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$,

$\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा

$\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ हैं ।

22. अन्तराल $[0, \pi]$ में फलन $f(x) = \sin 2x$ पर रोले का प्रमेय लागू है या नहीं जाँच कीजिए । अत: वे बिन्दु भी ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श-रेखा x-अक्ष के समांतर है ।

23. x के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए फलन $f(x) = 2 + 3x - x^3$ ह्रासमान है ।

24. एक व्यस्त चौराहे X पर, हरी बत्ती मिलने की प्रायिकता 30% है । इस चौराहे X पर तीन में से लगातार दो दिन हरी बत्ती के मिलने की प्रायिकता क्या है ?

25. सिद्ध कीजिए कि :

$$\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\cos^{-1} x, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1.$$

अथवा

$f : R_+ \to (7, \infty)$, $f(x) = 16x^2 + 24x + 7$ द्वारा परिभाषित एकैकी और आच्छादक फलन पर विचार कीजिए, जहाँ R_+ सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है । फलन f का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए ।

26. k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए रेखाएँ $x = -y = kz$ तथा $x - 2 = 2y + 1 = -z + 1$ एक-दूसरे पर लम्ब हैं ।

SECTION B

Question numbers 21 to 26 carry 2 marks each.

21. Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ where $\vec{a} = 5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ and $\vec{b} = 7\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$.

OR

Find the volume of the parallelopiped whose adjacent edges are represented by $2\vec{a}$, $-\vec{b}$ and $3\vec{c}$, where

$$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k},$$

$$\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}, \text{ and}$$

$$\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}.$$

22. Examine the applicability of Rolle's theorem for the function $f(x) = \sin 2x$ in $[0, \pi]$. Hence find the points where the tangent is parallel to x-axis.

23. Find the values of x for which the function $f(x) = 2 + 3x - x^3$ is decreasing.

24. The probability of finding a green signal on a busy crossing X is 30%. What is the probability of finding a green signal on X on two consecutive days out of three ?

25. Prove that $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\cos^{-1} x$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$.

OR

Consider a bijective function $f : R_+ \to (7, \infty)$ given by $f(x) = 16x^2 + 24x + 7$, where R_+ is the set of all positive real numbers. Find the inverse function of f.

26. Find the value of k so that the lines $x = -y = kz$ and $x - 2 = 2y + 1 = -z + 1$ are perpendicular to each other.

खण्ड ग

प्रश्न संख्या 27 से 32 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है ।

27. एक फर्नीचर व्यापारी अपनी धनराशि को मेज़ों या कुर्सियों या दोनों के संयोजनों में निवेश करता है । निवेश के लिए उसके पास ₹ 50,000 हैं और उसके पास अधिकतम 35 वस्तुओं को रखने के लिए स्थान उपलब्ध है । एक कुर्सी का क्रय मूल्य ₹ 1,000 व एक मेज़ का क्रय मूल्य ₹ 2,000 है । इस व्यापारी को एक कुर्सी बेचकर ₹ 150 व एक मेज़ को बेचकर ₹ 250 का लाभ अर्जित होता है । उपर्युक्त समस्या के लिए अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए और आलेखीय विधि से समस्या को हल कीजिए ।

28. यदि $x = a \sec^3 \theta, \ y = a \tan^3 \theta$ है, तो $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

29. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}} \, dx$$

30. दो थैले I और II दिए गए हैं । थैले I में 3 लाल तथा 5 काली गेंदें हैं जबकि थैले II में 4 लाल तथा 3 काली गेंदें हैं । थैले I से थैले II में एक गेंद यादृच्छया स्थानांतरित की जाती है और तत्पश्चात् थैले II में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है । यदि यह निकाली गई गेंद काली गेंद है, तो स्थानांतरित की गई गेंद के काले रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

अथवा

एक कलश में 5 लाल, 2 सफेद तथा 3 काली गेंदें हैं । एक-एक करके, बिना प्रतिस्थापना के, इस कलश से 3 गेंदें यादृच्छया निकाली जाती हैं । सफेद गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । निकाली गई सफेद गेंदों की संख्या का माध्य व प्रसरण भी ज्ञात कीजिए ।

31. अवकल समीकरण $y e^y dx = (y^3 + 2x e^y) dy$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

अथवा

अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} = y - x \tan\left(\frac{y}{x}\right)$, जहाँ $x = 1$ पर $y = \frac{\pi}{4}$ है, का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए ।

32. माना N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है । संबंध R, $N \times N$ पर "(a, b) R (c, d) यदि और केवल यदि $ad = bc$, सभी $a, b, c, d \in N$ के लिए" द्वारा परिभाषित है । दिखाइए कि संबंध R एक तुल्यता संबंध है ।

SECTION C

Question numbers 27 to 32 carry 4 marks each.

27. A furniture trader deals in only two items — chairs and tables. He has ₹ 50,000 to invest and a space to store at most 35 items. A chair costs him ₹ 1,000 and a table costs him ₹ 2,000. The trader earns a profit of ₹ 150 and ₹ 250 on a chair and table, respectively. Formulate the above problem as an LPP to maximise the profit and solve it graphically.

28. If $x = a \sec^3 \theta,\ y = a \tan^3 \theta$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $\theta = \frac{\pi}{4}$.

29. Find :

$$\int \frac{2x + 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} \, dx$$

30. There are two bags, I and II. Bag I contains 3 red and 5 black balls and Bag II contains 4 red and 3 black balls. One ball is transferred randomly from Bag I to Bag II and then a ball is drawn randomly from Bag II. If the ball so drawn is found to be black in colour, then find the probability that the transferred ball is also black.

OR

An urn contains 5 red, 2 white and 3 black balls. Three balls are drawn, one-by-one, at random without replacement. Find the probability distribution of the number of white balls. Also, find the mean and the variance of the number of white balls drawn.

31. Find the general solution of the differential equation

$$y\, e^y\, dx = (y^3 + 2x\, e^y)\, dy.$$

OR

Find the particular solution of the differential equation

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \tan\left(\frac{y}{x}\right), \text{ given that } y = \frac{\pi}{4} \text{ at } x = 1.$$

32. Let N be the set of natural numbers and R be the relation on N × N defined by (a, b) R (c, d) iff ad = bc for all a, b, c, d ∈ N. Show that R is an equivalence relation.

खण्ड घ

प्रश्न संख्या 33 से 36 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है ।

33. दिखाइए कि त्रिज्या r व ऊँचाई h के लम्ब-वृत्तीय शंकु के अन्तर्गत अधिकतम आयतन के लम्ब-वृत्तीय बेलन की ऊँचाई, शंकु की ऊँचाई की एक-तिहाई है और बेलन का अधिकतम आयतन, शंकु के आयतन का $\frac{4}{9}$वाँ भाग है ।

34. समाकलन विधि से, क्षेत्र $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9,\ x + y \geq 3\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

35. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसमें बिन्दु A(2, 1, – 1) स्थित है तथा जो समतलों $2x + y - z = 3$ और $x + 2y + z = 2$ की प्रतिच्छेदन रेखा के लम्बवत् है । प्राप्त समतल व y-अक्ष के बीच का कोण भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

रेखा $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ तथा समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 6$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु Q की बिन्दु P(– 2, – 4, 7) से दूरी ज्ञात कीजिए । रेखा PQ का सदिश समीकरण भी लिखिए ।

36. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए और इसका प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$$x + 2y - 3z = 6$$
$$3x + 2y - 2z = 3$$
$$2x - y + z = 2$$

अथवा

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

SECTION D

Question numbers 33 to 36 carry 6 marks each.

33. Show that the height of the right circular cylinder of greatest volume which can be inscribed in a right circular cone of height h and radius r is one-third of the height of the cone, and the greatest volume of the cylinder is $\frac{4}{9}$ times the volume of the cone.

34. Using integration, find the area of the region $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9,\ x + y \geq 3\}$.

35. Find the equation of the plane that contains the point A(2, 1, – 1) and is perpendicular to the line of intersection of the planes $2x + y - z = 3$ and $x + 2y + z = 2$. Also find the angle between the plane thus obtained and the y-axis.

OR

Find the distance of the point P(– 2, – 4, 7) from the point of intersection Q of the line $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ and the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 6$. Also write the vector equation of the line PQ.

36. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, then find A^{-1} and use it to solve the following system of the equations :

$$x + 2y - 3z = 6$$

$$3x + 2y - 2z = 3$$

$$2x - y + z = 2$$

OR

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Series HMJ/1

SET-3

कोड नं.
Code No. **65/1/3**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

नोट	NOTE
(I) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **15** हैं ।	(I) Please check that this question paper contains **15** printed pages.
(II) प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।	(II) Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
(III) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **36** प्रश्न हैं ।	(III) Please check that this question paper contains **36** questions.
(IV) कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।	(IV) Please write down the Serial Number of the question in the answer-book before attempting it.
(V) इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।	(V) 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : 80*

Time allowed : 3 hours — *Maximum Marks : 80*

सामान्य निर्देश :

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख़्ती से पालन कीजिए :

(i) *यह प्रश्न-पत्र **चार** खण्डों में विभाजित किया गया है – क, ख, ग एवं घ । इस प्रश्न–पत्र में **36** प्रश्न हैं । **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) ***खण्ड क** में प्रश्न संख्या **1** से **20** तक **20** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।*

(iii) ***खण्ड ख** में प्रश्न संख्या **21** से **26** तक **6** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **2** अंकों का है ।*

(iv) ***खण्ड ग** में प्रश्न संख्या **27** से **32** तक **6** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **4** अंकों का है ।*

(v) ***खण्ड घ** में प्रश्न संख्या **33** से **36** तक **4** प्रश्न हैं एवं प्रत्येक प्रश्न **6** अंकों का है ।*

(vi) *प्रश्न-पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है । तथापि एक-एक अंक वाले तीन प्रश्नों में, दो-दो अंकों वाले दो प्रश्नों में, चार-चार अंकों वाले दो प्रश्नों में और छः-छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं । ऐसे प्रश्नों में से केवल एक ही विकल्प का उत्तर लिखिए ।*

(vii) *इसके अतिरिक्त, आवश्यकतानुसार, प्रत्येक खण्ड और प्रश्न के साथ यथोचित निर्देश दिए गए हैं ।*

(viii) *केलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।*

खण्ड क

प्रश्न संख्या 1 से 20 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं । सही विकल्प चुनिए ।

1. आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय होगा, यदि

(A) $\lambda = -1$

(B) $\lambda = 0$

(C) $\lambda = 1$

(D) $\lambda \in R - \{1\}$

2. कोटि 2 वाले अवकल समीकरण के विशेष हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या होगी

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

General Instructions :

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

(i) *This question paper comprises* ***four*** *Sections A, B, C and D. This question paper carries* ***36*** *questions.* ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) ***Section A*** *– Questions no.* ***1*** *to* ***20*** *comprises of* ***20*** *questions of* ***1*** *mark each.*

(iii) ***Section B*** *– Questions no.* ***21*** *to* ***26*** *comprises of* ***6*** *questions of* ***2*** *marks each.*

(iv) ***Section C*** *– Questions no.* ***27*** *to* ***32*** *comprises of* ***6*** *questions of* ***4*** *marks each.*

(v) ***Section D*** *– Questions no.* ***33*** *to* ***36*** *comprises of* ***4*** *questions of* ***6*** *marks each.*

(vi) *There is no overall choice in the question paper. However, an internal choice has been provided in 3 questions of one mark, 2 questions of two marks, 2 questions of four marks and 2 questions of six marks. Only one of the choices in such questions have to be attempted.*

(vii) *In addition to this, separate instructions are given with each section and question, wherever necessary.*

(viii) *Use of calculators is* ***not*** *permitted.*

SECTION A

Question numbers 1 to 20 carry 1 mark each.

Question numbers 1 to 10 are multiple choice type questions. Select the correct option.

1. The matrix $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ is not invertible for

(A) $\lambda = -1$

(B) $\lambda = 0$

(C) $\lambda = 1$

(D) $\lambda \in R - \{1\}$

2. The number of arbitrary constants in the particular solution of a differential equation of second order is (are)

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

3. $\tan^{-1}(\tan \frac{7\pi}{6})$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{7\pi}{6}$

4. रैखिक असमिकाओं के निकाय से नियत सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 0), (4, 0), (2, 4) तथा (0, 5) हैं । यदि $z = ax + by$, जहाँ $a, b > 0$ का अधिकतम मान बिन्दुओं (2, 4) तथा (4, 0) दोनों पर हो, तो

(A) $a = 2b$

(B) $2a = b$

(C) $a = b$

(D) $3a = b$

5. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, जहाँ $P(A) = \frac{1}{3}$ व $P(B) = \frac{1}{4}$ है, तो $P(B'|A)$ बराबर है

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) 1

6. यदि A एक वर्ग आव्यूह है तथा $A^2 = A$ हो, तो $(I - A)^3 + A$ बराबर है

(A) I

(B) 0

(C) I – A

(D) I + A

3. The value of $\tan^{-1}(\tan\frac{7\pi}{6})$ is

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{7\pi}{6}$

4. The corner points of the feasible region determined by the system of linear inequalities are (0, 0), (4, 0), (2, 4) and (0, 5). If the maximum value of z = ax + by, where a, b > 0 occurs at both (2, 4) and (4, 0), then

(A) a = 2b

(B) 2a = b

(C) a = b

(D) 3a = b

5. If A and B are two independent events with $P(A) = \frac{1}{3}$ and $P(B) = \frac{1}{4}$, then $P(B' \mid A)$ is equal to

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) 1

6. If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then $(I - A)^3 + A$ is equal to

(A) I

(B) 0

(C) I – A

(D) I + A

7. $\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$ बराबर है

(A) $\frac{e^2}{2}$

(B) 1

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $-\infty$

8. बिन्दुओं (–1, 3, 2) तथा (5, 0, 6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर बिन्दु P स्थित है । यदि P का x-निर्देशांक 2 हो, तो इसका z-निर्देशांक होगा

(A) –1

(B) 4

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 8

9. यदि सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{k}$ पर प्रक्षेप शून्य है, तो λ का मान होगा

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{-2}{3}$

(D) $\frac{-3}{2}$

10. समतल z = 0 के लंबवत् तथा बिन्दु (–1, 5, 4) से गुज़रने वाली रेखा का सदिश समीकरण होगा

(A) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + \hat{j})$

(B) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + (4 + \lambda)\hat{k}$

(C) $\vec{r} = \hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\hat{k}$

(D) $\vec{r} = \lambda\hat{k}$

7. $\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$ is equal to

(A) $\frac{e^2}{2}$

(B) 1

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $-\infty$

8. A point P lies on the line segment joining the points (– 1, 3, 2) and (5, 0, 6). If x-coordinate of P is 2, then its z-coordinate is

(A) –1

(B) 4

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 8

9. If the projection of $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ on $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{k}$ is zero, then the value of λ is

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{-2}{3}$

(D) $\frac{-3}{2}$

10. The vector equation of the line passing through the point (–1, 5, 4) and perpendicular to the plane z = 0 is

(A) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + \hat{j})$

(B) $\vec{r} = -\hat{i} + 5\hat{j} + (4 + \lambda)\hat{k}$

(C) $\vec{r} = \hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\hat{k}$

(D) $\vec{r} = \lambda\hat{k}$

MATH|MATICMATH|MATICMATH|MATICMATH|MATICMATH|MATICMATH|MATICMATH|MATICMATH|MATICMATH|MATICMATH|MATICMATH|MATICH

प्रश्न संख्या 11 से 15 तक के सभी प्रश्नों के खाली स्थान भरिए ।

11. दो बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमश: $\vec{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{OB} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ हैं । बिन्दु P, जो रेखाखण्ड AB को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है, का स्थिति सदिश है ___________ ।

12. वक्र $y^2 = 8x$ के मूल-बिन्दु पर अभिलंब का समीकरण है __________ ।

अथवा

एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 cm/s की दर से बढ़ रही है । उस क्षण पर जबकि वृत्त की त्रिज्या 2 cm है, वृत्त के क्षेत्रफल में __________ cm^2/s की दर से बढ़ोतरी होगी ।

13. यदि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है और A_{ij} अवयव a_{ij} का सहखण्ड है, तो $a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13}$ का मान होगा _____________ .

अथवा

यदि एक आव्यूह A सममित तथा विषम सममित दोनों ही है, तो A एक ___________ है ।

14. यदि समस्त $a_1, a_2 \in A$ के लिए $(a_1, a_2) \in R$ से $(a_2, a_1) \in R$ प्राप्त हो, तो समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R कहलाता है _________ ।

15. $f(x) = [x]$, $0 < x < 2$ द्वारा परिभाषित महत्तम पूर्णांक फलन x = __________ पर अवकलनीय नहीं होता है ।

प्रश्न संख्या 16 से 20 अति संक्षिप्त उत्तर वाले प्रश्न हैं ।

16. यदि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है तथा $|A| = 2$ हो, तो $|-AA'|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

17. ताश की 52 पत्तों वाली अच्छी प्रकार से फेंटी गई गड्डी में से यादृच्छया तथा बिना प्रतिस्थापना के एक-एक कर के दो पत्ते निकाले गए । एक पत्ता लाल तथा दूसरा काले रंग का आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

18. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^3 |2x - 1| \, dx$$

19. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$$

Fill in the blanks in question numbers 11 to 15.

11. The position vectors of two points A and B are $\vec{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{OB} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, respectively. The position vector of a point P which divides the line segment joining A and B in the ratio 2 : 1 is __________ .

12. The equation of the normal to the curve $y^2 = 8x$ at the origin is __________ .

OR

The radius of a circle is increasing at the uniform rate of 3 cm/sec. At the instant when the radius of the circle is 2 cm, its area increases at the rate of __________ cm^2/s.

13. If A is a square matrix of order 3 and A_{ij} is the cofactor of the element a_{ij}, then value of $a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13}$ is __________ .

OR

If the matrix A is both symmetric and skew symmetric, then A is a __________ .

14. A relation R in a set A is called __________, if $(a_1, a_2) \in R$ implies $(a_2, a_1) \in R$, for all $a_1, a_2 \in A$.

15. The greatest integer function defined by $f(x) = [x], 0 < x < 2$ is not differentiable at x = __________ .

Question numbers 16 to 20 are very short answer type questions.

16. If A is a square matrix of order 3 and $|A| = 2$, then find the value of $|-AA'|$.

17. Two cards are drawn at random and one-by-one without replacement from a well-shuffled pack of 52 playing cards. Find the probability that one card is red and the other is black.

18. Evaluate :

$$\int_1^3 |2x - 1| \, dx$$

19. Find :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$$

20. ज्ञात कीजिए :

$$\int x^4 \log x \, dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}} \, dx$$

खण्ड ख

प्रश्न संख्या 21 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है ।

21. एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जो प्रत्येक सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लम्बवत् हो, जहाँ $\vec{a} = 5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ और $\vec{b} = 7\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$.

अथवा

उस समांतर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $2\vec{a}$, $-\vec{b}$ तथा $3\vec{c}$ द्वारा निरूपित हैं, जहाँ

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$,

$\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा

$\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ हैं ।

22. यदि $f(x) = \sqrt{\tan \sqrt{x}}$ हो, तो $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$ ज्ञात कीजिए ।

23. अवकल का प्रयोग करके, $\sqrt{25 \cdot 3}$ का सन्निकट मान दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए ।

24. एक व्यस्त चौराहे X पर, हरी बत्ती मिलने की प्रायिकता 30% है । इस चौराहे X पर तीन में से लगातार दो दिन हरी बत्ती के मिलने की प्रायिकता क्या है ?

25. सिद्ध कीजिए कि :

$\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\cos^{-1} x, \ \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1.$

अथवा

$f : R_+ \to (7, \infty)$, $f(x) = 16x^2 + 24x + 7$ द्वारा परिभाषित एकैकी और आच्छादक फलन पर विचार कीजिए, जहाँ R_+ सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है । फलन f का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए ।

26. k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए रेखाएँ $x = -y = kz$ तथा $x - 2 = 2y + 1 = -z + 1$ एक-दूसरे पर लम्ब हैं ।

20. Find :

$$\int x^4 \log x \, dx$$

OR

Find :

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \, dx$$

SECTION B

Question numbers 21 to 26 carry 2 marks each.

21. Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ where $\vec{a} = 5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ and $\vec{b} = 7\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$.

OR

Find the volume of the parallelopiped whose adjacent edges are represented by $2\vec{a}$, $-\vec{b}$ and $3\vec{c}$, where

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$,

$\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$, and

$\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$.

22. If $f(x) = \sqrt{\tan \sqrt{x}}$, then find $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$.

23. Using differentials, find the approximate value of $\sqrt{25 \cdot 3}$ up to two places of decimals.

24. The probability of finding a green signal on a busy crossing X is 30%. What is the probability of finding a green signal on X on two consecutive days out of three ?

25. Prove that $\sin^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2}) = 2\cos^{-1} x$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$.

OR

Consider a bijective function $f : R_+ \to (7, \infty)$ given by $f(x) = 16x^2 + 24x + 7$, where R_+ is the set of all positive real numbers. Find the inverse function of f.

26. Find the value of k so that the lines $x = -y = kz$ and $x - 2 = 2y + 1 = -z + 1$ are perpendicular to each other.

खण्ड ग

प्रश्न संख्या 27 से 32 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है ।

27. एक फर्नीचर व्यापारी अपनी धनराशि को मेज़ों या कुर्सियों या दोनों के संयोजनों में निवेश करता है । निवेश के लिए उसके पास ₹ 50,000 हैं और उसके पास अधिकतम 35 वस्तुओं को रखने के लिए स्थान उपलब्ध है । एक कुर्सी का क्रय मूल्य ₹ 1,000 व एक मेज़ का क्रय मूल्य ₹ 2,000 है । इस व्यापारी को एक कुर्सी बेचकर ₹ 150 व एक मेज़ को बेचकर ₹ 250 का लाभ अर्जित होता है । उपर्युक्त समस्या के लिए अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए और आलेखीय विधि से समस्या को हल कीजिए ।

28. यदि $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$ है, तो $\theta = \frac{\pi}{3}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

29. योगफल की सीमा के रूप में $\int_1^3 e^x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

30. दो थैले I और II दिए गए हैं । थैले I में 3 लाल तथा 5 काली गेंदें हैं जबकि थैले II में 4 लाल तथा 3 काली गेंदें हैं । थैले I से थैले II में एक गेंद यादृच्छया स्थानांतरित की जाती है और तत्पश्चात् थैले II में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है । यदि यह निकाली गई गेंद काली गेंद है, तो स्थानांतरित की गई गेंद के काले रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

अथवा

एक कलश में 5 लाल, 2 सफेद तथा 3 काली गेंदें हैं । एक-एक करके, बिना प्रतिस्थापना के, इस कलश से 3 गेंदें यादृच्छया निकाली जाती हैं । सफेद गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । निकाली गई सफेद गेंदों की संख्या का माध्य व प्रसरण भी ज्ञात कीजिए ।

31. अवकल समीकरण $y\,e^y\,dx = (y^3 + 2x\,e^y)\,dy$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

अथवा

अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} = y - x\tan\left(\frac{y}{x}\right)$, जहाँ $x = 1$ पर $y = \frac{\pi}{4}$ है, का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए ।

32. माना N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है । संबंध R, $N \times N$ पर "(a, b) R (c, d) यदि और केवल यदि $ad = bc$, सभी $a, b, c, d \in N$ के लिए" द्वारा परिभाषित है । दिखाइए कि संबंध R एक तुल्यता संबंध है ।

SECTION C

Question numbers 27 to 32 carry 4 marks each.

27. A furniture trader deals in only two items — chairs and tables. He has ₹ 50,000 to invest and a space to store at most 35 items. A chair costs him ₹ 1,000 and a table costs him ₹ 2,000. The trader earns a profit of ₹ 150 and ₹ 250 on a chair and table, respectively. Formulate the above problem as an LPP to maximise the profit and solve it graphically.

28. If $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $\theta = \frac{\pi}{3}$.

29. Evaluate $\int_1^3 e^x \, dx$ as limit of the sums.

30. There are two bags, I and II. Bag I contains 3 red and 5 black balls and Bag II contains 4 red and 3 black balls. One ball is transferred randomly from Bag I to Bag II and then a ball is drawn randomly from Bag II. If the ball so drawn is found to be black in colour, then find the probability that the transferred ball is also black.

OR

An urn contains 5 red, 2 white and 3 black balls. Three balls are drawn, one-by-one, at random without replacement. Find the probability distribution of the number of white balls. Also, find the mean and the variance of the number of white balls drawn.

31. Find the general solution of the differential equation

$$y\, e^y \, dx = (y^3 + 2x\, e^y)\, dy.$$

OR

Find the particular solution of the differential equation

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \tan\left(\frac{y}{x}\right), \text{ given that } y = \frac{\pi}{4} \text{ at } x = 1.$$

32. Let N be the set of natural numbers and R be the relation on N × N defined by (a, b) R (c, d) iff ad = bc for all a, b, c, d ∈ N. Show that R is an equivalence relation.

खण्ड घ

प्रश्न संख्या 33 से 36 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है ।

33. दिखाइए कि त्रिज्या r व ऊँचाई h के लम्ब-वृत्तीय शंकु के अन्तर्गत अधिकतम आयतन के लम्ब-वृत्तीय बेलन की ऊँचाई, शंकु की ऊँचाई की एक-तिहाई है और बेलन का अधिकतम आयतन, शंकु के आयतन का $\frac{4}{9}$वाँ भाग है ।

34. समाकलन विधि से परवलय $y = 3x^2$ तथा रेखा $3x - y + 6 = 0$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

35. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसमें बिन्दु $A(2, 1, -1)$ स्थित है तथा जो समतलों $2x + y - z = 3$ और $x + 2y + z = 2$ की प्रतिच्छेदन रेखा के लम्बवत् है । प्राप्त समतल व y-अक्ष के बीच का कोण भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

रेखा $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ तथा समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 6$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु Q की बिन्दु $P(-2, -4, 7)$ से दूरी ज्ञात कीजिए । रेखा PQ का सदिश समीकरण भी लिखिए ।

36. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए और इसका प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$$x + 2y - 3z = 6$$
$$3x + 2y - 2z = 3$$
$$2x - y + z = 2$$

अथवा

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

SECTION D

Question numbers 33 to 36 carry 6 marks each.

33. Show that the height of the right circular cylinder of greatest volume which can be inscribed in a right circular cone of height h and radius r is one-third of the height of the cone, and the greatest volume of the cylinder is $\frac{4}{9}$ times the volume of the cone.

34. Using integration, find the area of the region enclosed by the parabola $y = 3x^2$ and the line $3x - y + 6 = 0$.

35. Find the equation of the plane that contains the point A(2, 1, – 1) and is perpendicular to the line of intersection of the planes $2x + y - z = 3$ and $x + 2y + z = 2$. Also find the angle between the plane thus obtained and the y-axis.

OR

Find the distance of the point P(– 2, – 4, 7) from the point of intersection Q of the line $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ and the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 6$. Also write the vector equation of the line PQ.

36. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, then find A^{-1} and use it to solve the following system of the equations :

$$x + 2y - 3z = 6$$

$$3x + 2y - 2z = 3$$

$$2x - y + z = 2$$

OR

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$